Automorphismes forts des algébroïdes de Courant réguliers

Benjamin Couéraud Coueraud

l'université nantes angers le mans

COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

université angers

Thèse de Doctorat

Benjamin COUÉRAUD

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25
Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques (LAREMA)

Soutenue le 7 Décembre 2015
Thèse n° : 77898

Automorphismes forts des algébroïdes de Courant réguliers

JURY

Rapporteurs :	**M. Thomas STROBL**, Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan
	M^{me} Joana NUNES DA COSTA, Professeur, Université de Coimbra, Département de Mathématiques
Examinateurs :	**M^{me} Sophie CHEMLA**, Maître de Conférences, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu
	M. Geoffrey POWELL, Directeur de Recherche, Université d'Angers, LAREMA
	M^{me} Yvette KOSMANN-SCHWARZBACH, Professeur, École Polytechnique, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Directeur de thèse :	**M. Vladimir ROUBTSOV**, Professeur, Université d'Angers, LAREMA

Table des matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à la description du groupe des automorphismes forts d'un algébroïde de Courant régulier. Elle comporte trois chapitres ainsi qu'une annexe, dont nous décrivons le contenu ci-après.

Le premier chapitre contient les notions sur les algébroïdes de Lie nécessaires pour l'étude des algébroïdes de Courant effectuée dans les chapitres suivants. Un *algébroïde de Lie* (voir [Mar08, définition 3.3.1]) $\mathcal{A}$ (voir définition 1.1.2) sur une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $A \to M$ sur cette variété, d'un morphisme de fibrés vectoriels $\mathsf{a} : A \to TM$, appelé *ancre*, à valeurs dans le fibré tangent $TM \to M$ de M. L'espace des sections $\Gamma(A)$ de $A \to M$ est une algèbre de Lie, dont on notera le crochet $[\cdot,\cdot]$. Il est demandé de plus que $[\cdot,\cdot]$ satisfasse la règle de Leibniz (1.1), dans laquelle le morphisme a intervient explicitement. Cette règle implique qu'en général $[\cdot,\cdot]$ *n'est pas* $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire, par opposition au crochet dont est équipé l'espace des sections d'un *fibré en algèbres de Lie*. Les algébroïdes de Lie ont été introduits par Pradines dans [Pra67]. Les algébroïdes de Lie sont aux groupoïdes de Lie (voir [Mac05, section 1.1]) ce que sont les algèbres de Lie aux groupes de Lie. Ce sont des objets naturels en géométrie différentielle (voir [Mac05]), ainsi qu'en géométrie différentielle graduée depuis le travail de Vaintrob apparu dans [Vai97]. Les *algèbres de Lie-Rinehart* (voir définition [Hue98, section 1]) sont une version algébrique des algébroïdes de Lie, dans laquelle la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ est remplacée par une R-algèbre F (R désignant un anneau commutatif unitaire) et $\Gamma(A)$ est remplacé par un F-module L qui est également une algèbre de Lie sur R. Après avoir rappelé quelques définitions et exemples usuels, incluant les notions de morphismes (voir les définitions 1.3.1 et 1.3.9), de cohomologie (définition 1.4.11) et de représentation (définition 1.5.10) d'algébroïdes de Lie, nous définissons dans la section 1.6 la notion de *cohomologie tordue* par un cocycle impair θ d'un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur une variété M équipé d'une représentation $(V \to M, \nabla)$. Nous montrons dans le théorème 1.6.6 et son corollaire 1.6.7 que cette cohomologie $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta)$ ne dépend que de la classe de cohomologie de la forme différentielle θ, généralisant ainsi aux algébroïdes de Lie un résultat obtenu par Mathai et Wu dans [MW11, section 1]. Enfin, on termine ce chapitre en décrivant l'algèbre de Schouten-Nijenhuis d'un algébroïde de Lie ; cette structure algébrique étant nécessaire pour la description des *bigébroïdes de Lie*, à partir desquels on obtient des exemples importants d'algébroïdes de Courant (exemple 2.3.13).

Le second chapitre est consacré aux algébroïdes de Courant. Un *algébroïde de Courant* $\mathcal{E}$ (voir définition 2.2.2) sur une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $E \to M$ sur cette variété, d'un morphisme de fibrés vectoriels $\mathsf{a} : E \to TM$, appelé *ancre*, à valeurs dans le fibré tangent $TM \to M$ de M. L'espace des sections $\Gamma(E)$ de $E \to M$ est équipé d'une opération $\mathbb{R}$-bilinéaire $[\cdot,\cdot]$, appelée crochet, qui *n'est pas* antisymétrique, mais vérifie cependant la relation

$$\big[u,[v,w]\big] = \big[[u,v],w\big] + \big[v,[u,w]\big].$$

Le défaut d'antisymétrie de $[\cdot,\cdot]$ est contrôlé (relation (2.7)) par un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $E \to M$ ainsi que par l'opérateur D, lequel est construit à partir de l'ancre a. Enfin, une relation de compatibilité entre l'ancre a, le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et le crochet $[\cdot,\cdot]$ est demandée (relation (2.5)). Bien qu'il ne soit pas demandé dans la définition que le crochet $[\cdot,\cdot]$ satisfasse une règle de Leibniz à l'instar des algébroïdes de Lie, cette propriété est automatiquement vérifiée (voir relation (2.9)).

Les algébroïdes de Courant ont été introduits par T. J. Courant dans sa thèse [Cou90] portant sur *l'intégrabilité des structures de Dirac*. Ils sont devenus des objets importants en géométrie différentielle depuis le travail de Z.-J. Liu, A. Weinstein et P. Xu sur les *bigébroïdes de Lie* [LWX97], qui sont aux algébroïdes de Lie ce que sont les bigèbres de Lie aux algèbres de Lie ([LGPV13, définition 11.17]). Un historique de ce domaine est disponible dans [KS13].

Les algébroïdes de Courant exacts jouent un rôle primordial dans la *géométrie complexe généralisée* inventée par N. Hitchin et développée notamment par M. Gualtieri dans [Gua11]. Cette géométrie a trouvé plusieurs applications en Physique théorique, essentiellement en théorie des cordes, concernant les compactifications avec flux dits *géométriques* [Gra06] et la *T-dualité*, une notion permettant de considérer certaines théories physiques comme équivalentes. Cette dualité peut être alors considérée comme un isomorphisme entre deux algébroïdes de Courant exacts réduits d'après [CG10, théorème 3.1]. Il est également possible de démontrer les *règles de Buscher* ; ces dernières permettent de calculer les *T-duaux* des divers champs utilisés dans certaines théories physiques, voir [CG10, exemple 4.6]. D'autre part, il existe un algébroïde de Courant, basé sur une variété de Poisson, qui joue lui aussi un rôle en théorie des cordes avec des flux dits *non-géométriques* et la T-dualité associée (voir [AMSW14] et [AMW15]). En Mathématiques, son utilisation a permis de résoudre un problème issu de la géométrie bihermitienne [Gua11, section 6.4] et d'obtenir un cadre géométrique pour les équations de Monge-Ampère en dimension 3 [KSR10].

La recherche actuelle tend également à développer l'utilisation d'une classe plus générale d'algébroïdes de Courant, les *algébroïdes de Courant transitifs*, pour lesquels l'ancre est surjective. Ces derniers jouent un rôle croissant en supergravité (voir par exemple [GF14] pour une référence mathématique). Des résultats de T-dualité plus avancés ont pu ainsi être obtenus également dans [BH15, section 4.3] grâce à l'utilisation de ce cadre géométrique. En Mathématiques, l'algébroïde de Courant transitif le plus élémentaire est à l'origine d'une nouvelle géométrie, appelée *B_n-géométrie*, qui possède des applications aux 3-variétés [Rub13, section 3]. Récemment, les algébroïdes de Courant transitifs ont également acquis une place importante dans l'étude géométrique du système de Strominger [GFRT15], ainsi que dans l'étude des structures *string*, voir [BH15].

Les résultats mentionnés ci-dessus sont basés sur la définition d'algébroïde de Courant utilisant la géométrie différentielle usuelle. Il existe une autre définition possible, due à un théorème de D. Roytenberg [Roy02a, théorème 4.5] basée sur la *géométrie différentielle graduée*. Sous cette forme, un algébroïde de Courant est une dg-variété symplectique de degré 2, et prend place dans une hiérarchie d'objets amenés à jouer un rôle important dans les applications en Physique théorique, notamment en tant qu'espaces-cibles de nouveaux σ-modèles connus sous le nom de *σ-modèles AKSZ* (voir [Roy07] et [KS10, section 6] à ce sujet).

Il est également intéressant de noter que la notion d'algébroïde de Courant peut être enrichie de diverses structures. On retiendra en particulier l'existence des algébroïdes de Courant conformes (voir [Bar13]), lesquels sont utiles pour traiter certains problèmes de T-dualité, les algébroïdes de Courant holomorphes (voir [GS14, section 4.3]), les algébroïdes de Courant exacts hyper-Kähleriens (voir [BCG08, section 4.3]) qui sont liés aux algébroïdes de Courant hypersymplectiques (voir [CA15]), et enfin les algébroïdes de Courant hypercomplexes (voir [Sti09]) qui sont liés aux algébroïdes de Courant holomorphes symplectiques (voir [HS15]). Ces dernières structures généralisent les structures hypercomplexes et holomorphes symplectiques sur une variété, lesquelles sont elles-mêmes des généralisations des structures hyper-Kähleriennes (voir [Joy00, chapitre 7]).

Dans ce second chapitre, nous commençons par définir les algébroïdes de Leibniz (définition 2.1.9) qui sont essentiellement une généralisation des algébroïdes de Lie, excepté que les modules de sections sont des algèbres de Leibniz (définition 2.1.1) au lieu d'algèbres de Lie (le crochet n'est plus nécessairement antisymétrique). Nous définissons ensuite les algébroïdes de Courant (définition 2.2.2) et établissons plusieurs propriétés (proposition 2.2.7) qui sont utiles dans toute la suite. Nous étudions plusieurs exemples dans la section 2.3, notamment les algébroïdes de Courant *exacts* et les *doubles de bigébroïdes de Lie*. Nous consacrons la section 2.4 à la construction, nouvelle, du *produit cartésien* d'algébroïdes de Courant, celle-ci étant utile dans la définition de morphismes faibles. La section 2.5 traite des *structures de Dirac*, que l'on va utiliser dans la section suivante concernant les morphismes *forts* et *faibles* entre algébroïdes de Courant. La notion de morphisme fort entre deux algébroïdes de Courant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ (définition 2.6.10) fait intervenir les isomorphismes de dualité induits par les produits scalaires sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, tandis que la notion de morphisme faible (définition 2.6.13), basée sur l'idée générale de *correspondance*, est définie comme une structure de Dirac intégrable du produit cartésien $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, $-\mathcal{E}$ désignant l'algébroïde de Courant $\mathcal{E}$ équipé de l'opposé du produit scalaire de $\mathcal{E}$. La composition de morphismes forts est toujours possible, tandis que la composition de morphismes faibles est sujette à des hypothèses supplémentaires (voir proposition 2.6.23). Dans cette section également, on associe canoniquement à tout algébroïde de Courant $\mathcal{E}$ un algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$. Nous terminons ce chapitre par une section consacrée à la *cohomologie naïve* d'un algébroïde de Courant, laquelle est traitée en détail. En particulier, nous montrons qu'elle est isomorphe à la cohomologie de l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ canoniquement associé.

Enfin, dans un troisième chapitre, nous étudions les automorphismes forts d'un algébroïde de Courant *régulier*, c'est-à-dire ceux dont l'ancre est un morphisme de fibrés vectoriels de rang constant. De tels algébroïdes de Courant peuvent être décomposés au moyen d'une *dissection* (voir la section 3.1 et en particulier le diagramme (3.3)), généralisation des scindements isotropes qui ont été utilisés pour l'étude des algébroïdes de Courant exacts (voir la preuve de 2.3.7). La notion de dissection est apparue avec l'article [CSX13] et est l'objet de la première section 3.1 de ce troisième chapitre. On y explique en particulier (voir le théorème 3.1.13) qu'étant donnée une dissection d'un algébroïde de Courant régulier $\mathcal{E}$ sur une variété M, on peut transporter toute la structure de $\mathcal{E}$ sur le fibré vectoriel $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$, où $F = \operatorname{Im} \mathsf{a}$ et $Q = \operatorname{Ker} \mathsf{a}/(\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp$ définissent respectivement un algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ et un algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ sur M, indépendamment de la dissection choisie (propositions 3.1.1 et 3.1.2). En outre, le crochet de la structure d'algébroïde de Courant sur $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ dépend d'une $\mathcal{F}$-connexion sur $\mathcal{Q}$, d'une 2-forme différentielle R à valeurs dans $\mathcal{Q}$ et d'une 3-forme différentielle H ; ces données étant compatibles entre elles au sens des relations (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), et (3.10). La preuve de ce théorème fondamental est donnée en annexe ; sa présentation est quelque peu différente de celle donnée dans [CSX13]. Dans la section suivante, nous nous intéressons à l'effet d'un changement de dissection, et sommes explicites sur la forme d'un tel changement de dissection (théorème 3.2.7). Nous utilisons ce résultat pour montrer que deux classes caractéristiques associées à un algébroïde de Courant régulier $\mathcal{E}$ sont invariantes par changement de dissection ; il s'agit de la *première classe de Pontryagin* et de la *classe de Chen-Stiénon-Xu* de $\mathcal{E}$ (voir les propositions 3.2.10 et 3.2.14). Ces résultats, déjà connus dans la littérature (voir [CSX13]), sont cependant prouvés avec un formalisme légèrement différent, qui peut être réutilisé plus facilement pour l'étude d'autres problèmes. Dans les deux sections 3.3 et 3.4 qui suivent, nous calculons le groupe des automorphismes forts d'un algébroïde de Courant régulier au moyen d'une dissection. La structure de ce groupe d'automorphismes est explicitée par le théorème 3.3.16. Nous nous intéressons également à une version infinitésimale, qui se matérialise par une algèbre de Lie d'automorphismes infinitésimaux définie après l'étude des générateurs infinitésimaux de groupes à un paramètre dans le groupe des automorphismes forts de l'algébroïde de Courant, et dont la structure est explicitée dans 3.4.10. Nous terminons ce chapitre par l'étude de trois exemples dans la section 3.5, ce qui nous permet de retrouver les résultats de la littérature comme cas particuliers des théorèmes que nous avons précédemment établis.

Remerciements

Ce mémoire de thèse est le fruit de trois années de travail pendant lesquelles j'ai appris énormément, tant sur le plan mathématique que sur le plan personnel. Il n'aurait pas pu aboutir sans l'aide et les encouragements de nombreuses personnes, que je souhaite remercier ici.

En premier lieu, je tiens à remercier les rapporteurs, Joana Nunes da Costa et Thomas Strobl, qui ont d'une part accepté de rapporter cette thèse, et d'autre part contribué à son amélioration grâce aux nombreuses remarques qu'ils ont formulées. Je remercie également Sophie Chemla, Geoffrey Powell et Yvette Kosmann-Schwarzbach, pour avoir accepté de faire partie du jury ainsi que pour toutes leurs remarques.

Je tiens à remercier Vladimir Roubtsov pour m'avoir introduit aux algébroïdes de Lie et de Courant, pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse, pour avoir répondu à mes questions et financé plusieurs déplacements au début de ma thèse grâce à l'ANR DIADEMS, ainsi que pour ses encouragements.

Je tiens à remercier Geoffrey Powell pour avoir répondu à mes questions, ainsi que pour ses encouragements et son indulgence. Je le remercie également pour avoir coorganisé avec Vladimir Roubtsov et Friedrich Wagemann un groupe de travail Nantes-Angers sur le thème des algébroïdes de Courant, à propos duquel je remercie l'équipe *Algèbre et Géométries* du LAREMA et l'équipe *Topologie, Géométrie Algébrique* du Laboratoire Jean Leray pour leur participation.

Je tiens à remercier Marco Zambon et l'Université Autonome de Madrid pour son invitation et le temps qu'il m'a consacré lors de cette visite, ainsi que ses réponses à mes questions ultérieures.

Je tiens à remercier (dans le désordre) Rajan Amit Mehta, Urs Schreiber, Davide Alboresi, Jean-Claude Thomas, Kirill Mackenzie, Melchior Grützmann, Friedrich Wagemann, Marco Gualtieri, Izu Vaisman, Grégory Ginot, Matthieu Stiénon, Vassily Pestun, Paolo Rossi, Lucio Cirio, Pietro Tortella, Dmitry Roytenberg, Benoît Jubin, Shengda Hu, Bernardo Uribe, Peter Bouwknegt, Mario Garcia-Fernandez, David Baraglia, Eckhard Meinrenken, Ugo Bruzzo, David Li-Bland, Roberto Rubio, Yvette Kosmann-Schwarzbach pour avoir répondu à mes courriels et ainsi m'avoir éclairé à plusieurs reprises.

Je tiens à remercier mes amis Mohamed Benzerga et Delphine Pol pour l'aide mathématique et le soutien qu'ils m'ont apportés ces dernières années ; je me rappellerai entre autres de nos séminaires estivaux. Je remercie mes amis vietnamiens pour tous ces bons moments passés ensemble. La liste étant longue, je remercierai en particulier Nguyen Le Chi Quyet qui m'a aidé sur plusieurs points mathématiques. Merci à tous les doctorants du laboratoire pour nos conversations toujours animées et éclairantes. Je remercie également Dominique Prochasson pour m'avoir accordé son amitié et son soutien ces dernières années.

Je remercie l'Institut Galileo Galilei pour avoir pris en charge mon hébergement lors de la conférence « Geometry of Strings and Fields » à Florence. Je remercie le LAREMA et en particulier Loïc Chaumont pour m'avoir permis financièrement de faire de nombreux déplacements. Je remercie Loïc Chaumont également pour ses encouragements. Je remercie François Ducrot pour m'avoir offert une expérience enrichissante dans l'enseignement universitaire, ainsi que pour son aide au quotidien et ses encouragements. Je remercie également Jacquelin Charbonnel pour son aide informatique, Caroline Chalumeau et Alexandra Le Petitcorps pour leur bienveillance et leur bonne humeur, ainsi qu'Audrey Samson du SUOIP de l'Université d'Angers pour m'avoir aidé à préparer l'après-thèse.

Je remercie mon épouse Nguyen Thi Ngoc Anh : c'est grâce au partage de son allocation de recherche et de son soutien que ce travail de thèse a pu en partie être effectué. Enfin je remercie mes parents qui m'ont permis d'étudier dans de bonnes conditions ainsi que mes beaux-parents pour leurs encouragements.

Notations et conventions

On consigne ci-après quelques notations générales utilisées dans le texte. D'autres notations plus spécifiques au sujet sont introduites au fil du texte. Toutes les variétés considérées seront des variétés différentielles lisses [Lee13, chapitre 1]. On ne considèrera que des fibrés vectoriels $A \to M$ *réels*, *lisses*, et de *rang constant* au dessus de variétés M *connexes*, ainsi que leurs modules de sections $\Gamma(A)$ *lisses*.

$\mathbb{N}$	Le monoïde des entiers naturels.
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Les corps des nombres réels et des nombres complexes.
S_n	Le groupe des permutations sur n éléments.
$\lvert\sigma\rvert$	Signature d'une permutation σ.
$\mathrm{Gr}(f)$	Graphe d'une application f.
$\mathcal{C}^\infty(U)$	Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions lisses sur un ouvert U d'une variété.
$\mathcal{C}^\infty(U, X)$	Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions lisses sur un ouvert U d'une variété vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X.
$\mathcal{C}^\infty(M, X)^G$	Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions lisses d'une variété M vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel X, G-équivariantes, G agissant sur M et X.
$\mathbf{Dif}(M)$	Le groupe des difféomorphismes lisses d'une variété dans elle même.
$A \to M$	Un fibré d'espace total A et de base M.
$\mathrm{rg}(A)$	Rang d'un fibré vectoriel $A \to M$.
$TM \to M$	Le fibré vectoriel tangent d'une variété M.
$f^! A \to N$	Fibré $A \to M$ tiré en arrière le long d'une application lisse $f : N \to M$.
$A\big\rvert_U$	Restriction d'un fibré d'espace total A sur un ouvert U de la base.
A_x ou $A\rvert_x$	La fibre d'un fibré d'espace total A au dessus d'un point x de la base.
(φ, Φ)	Morphisme de fibrés Φ entre $A \to M$ et $B \to N$ couvrant $\varphi : M \to N$.
$\Phi : A \to B$	Morphisme de fibrés Φ entre $A \to M$ et $B \to M$ couvrant l'identité.
$\Gamma(A)$	Le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module des sections du fibré vectoriel $A \to M$.
$\Gamma(U, A)$	Le $\mathcal{C}^\infty(U)$-module des sections du fibré vectoriel $A\big\rvert_U \to U$.
s_x	Une section s d'un fibré, évaluée en un point x de la base.
pr_A	Projection sur le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(A)$.
$u \oplus v$	Section d'un fibré vectoriel $A \oplus B \to M$, généralement notée (u, v) dans la littérature.
$\Lambda^\bullet A$	Le fibré en algèbres extérieures $\mathbb{Z}$-graduées du fibré vectoriel $A \to M$.
$\wedge$	Produit extérieur dans une algèbre extérieure.

$\lvert\omega\rvert$	Degré d'un élément ω.
$\mathrm{Hom}(V,W)$	Le module des homomorphismes entre deux modules V et W.
$\mathrm{End}(V)$	L'algèbre des endomorphismes d'un module V.
$\mathrm{Der}(V)$	Algèbre de Lie (pour le commutateur) des dérivations d'un module V par rapport à une opération bilinéaire.
$X \cdot f$	L'action du champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ sur la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
$[\cdot,\cdot]$	Le crochet d'une algèbre de Lie ou d'un algébroïde.
$[\![\cdot,\cdot]\!]$	La version antisymétrique du crochet d'un algébroïde de Courant.
$V^\vee$	Dual $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, plus généralement d'un fibré vectoriel.
$T^\vee M \to M$	Le fibré vectoriel cotangent d'une variété M.
$F^\perp$	Orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E équipé d'un produit scalaire ; par définition $F^\perp \subset E$.
$\mathrm{Ann}(F)$	Annulateur d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E ; par définition $\mathrm{Ann}(F) \subset E^\vee$.
$\Omega^\bullet(M)$	L'algèbre des formes différentielles sur une variété M.
$\boldsymbol{\mathscr{L}}_X$, $\mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\iota}_X$	Dérivée de Lie, produit intérieur et différentielle de De Rham agissant sur les formes différentielles (triplet de Cartan de De Rham) ou triplet de Cartan associé à un feuilletage (voir remarque 1.4.19).
$\mathbf{H}^\bullet(M)$	Algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété M.
$\mathbf{Aut}(X)$	Groupe des automorphismes d'un objet X.
ad_ξ	L'endomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, associé à $\xi \in \mathfrak{g}$.
$\mathrm{Tr}(\Phi)$	La trace de l'endomorphisme d'espace vectoriel Φ.

- Par le terme *sous-variété* nous désignons une sous-variété *immergée* (*immersed submanifold* dans la littérature anglophone), c'est-à-dire telle que la différentielle de l'inclusion soit un morphisme injectif de fibrés vectoriels (voir [Lee13, chapitre 5]).
- Tous les morphismes de fibrés vectoriels seront considérés comme *réguliers*, c'est-à-dire de rang constant, ce qui permet de considérer le noyau et l'image d'un tel morphisme en tant que sous-fibrés vectoriels de rang constant (voir [Hus94, théorème 8.3, chapitre 3]). En particulier les ancres des algébroïdes seront toujours de *rang constant*, on ne travaillera donc qu'avec des algébroïdes de Lie, de Leibniz ou de Courant *réguliers*.
- Étant donné un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : A \to B$ couvrant l'identité ou un difféomorphisme, on notera encore Φ l'application induite entre les $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules de sections $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$ (voir [Lee13, chapitre 10]).
- A partir du chapitre 3, le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]$ des champs de vecteurs sera noté $\{\cdot,\cdot\}$ pour éviter des confusions avec les crochets provenant d'autres structures. Rappelons que le crochet de Lie des champs de vecteurs sur une variété M *correspond* au commutateur des dérivations de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ (voir [Lee13, chapitre 8]).

Chapitre 1

Algébroïdes de Lie

Dans ce chapitre, nous consignons quelques définitions et résultats usuels concernant les algébroïdes de Lie, dont il sera fait usage dans les chapitres suivants. Dans la section 1.6, une nouvelle cohomologie associée à un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ muni d'une représentation $(V \to M, \nabla)$ est définie à partir d'une forme différentielle impaire θ de $\mathcal{A}$. On montre alors que la nouvelle cohomologie ne dépend que de la classe de θ dans la cohomologie de $\mathcal{A}$.

1.1 Algébroïdes de Lie

Définition 1.1.1 : Une *ancre* sur un fibré vectoriel (réel) $A \to M$ est un morphisme de fibrés vectoriels $\mathsf{a} : A \to TM$ couvrant l'identité. Si $A \to M$ est équipé d'une ancre a, on dira que $A \to M$ est *ancré* par a.

Définition 1.1.2 : Un *algébroïde de Lie* $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ est la donnée d'un fibré vectoriel $A \to M$, d'une ancre a sur ce fibré, ainsi qu'une structure d'algèbre de Lie sur son module de sections globales $\Gamma(A)$ dont le crochet satisfait la *règle de Leibniz*

$$[u, fv] = f[u,v] + (\mathsf{a}(u) \cdot f)\, v, \tag{1.1}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Remarque 1.1.3 : Dans la définition ci-dessus, on considère une règle de Leibniz à droite. L'antisymétrie du crochet donne directement une règle de Leibniz à gauche

$$[fu, v] = f[u,v] - (\mathsf{a}(v) \cdot f)\, u. \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.4 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Alors (voir [KSM90, section 6.1]) l'ancre a induit un morphisme d'algèbres de Lie au niveau des modules de sections, c'est-à-dire

$$\mathsf{a}\big([u,v]\big) = \big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big],$$

pour tous u, $v \in \Gamma(A)$, où à gauche on a le crochet de l'algébroïde de Lie et à droite le crochet de Lie des champs des vecteurs.

Preuve : On a d'après la règle de Leibniz que $(\mathsf{a}(u)\cdot f)v = [u, fv] - f[u, v]$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toutes sections $u, v \in \Gamma(A)$. Par conséquent, en appliquant cette identité deux fois, il vient pour tout $w \in \Gamma(A)$ que

$$\begin{aligned}\Big\{\big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big]\cdot f\Big\}w &= \mathsf{a}(u)\cdot\big[\mathsf{a}(v)\cdot f\big]w - \mathsf{a}(v)\cdot\big[\mathsf{a}(u)\cdot f\big]w \\ &= \big[u, (\mathsf{a}(v)\cdot f)w\big] - (\mathsf{a}(v)\cdot f)[u, w] \\ &\qquad - \big[v, (\mathsf{a}(u)\cdot f)w\big] + (\mathsf{a}(u)\cdot f)[v, w] \\ &= \big[u, [v, fw]\big] - \big[u, f[v, w]\big] - \big[v, f[u, w]\big] + f\big[v, [u, w]\big] \\ &\qquad - \big[v, [u, fw]\big] + \big[v, f[u, w]\big] + \big[u, f[v, w]\big] - f\big[u, [v, w]\big],\end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant l'identité de Jacobi et l'antisymétrie du crochet,

$$\Big\{\big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big]\cdot f\Big\}w = \big[[u, v], fw\big] - f\big[[u, v], w\big] = \Big\{\mathsf{a}\big([u, v]\big)\cdot f\Big\}w.$$

Ceci étant vrai quelle que soit la section w et la fonction f, on obtient le résultat escompté. □

Définition 1.1.5 : Un algébroïde de Lie est *transitif* lorsque son ancre est surjective.

Définition 1.1.6 : Un algébroïde de Lie est *régulier* lorsque son ancre est de rang constant.

Remarque 1.1.7 : Puisque l'on suppose dans tout le texte que les morphismes de fibrés vectoriels sont par défaut de rang constant (voir les conventions), tous les algébroïdes de Lie que nous considérons sont par défaut réguliers.

1.2 Exemples d'algébroïdes de Lie

Exemple 1.2.1 : Un algébroïde de Lie de base un point s'identifie à une algèbre de Lie.

Exemple 1.2.2 : Un fibré $A \to M$ en algèbres de Lie est un algébroïde de Lie, dont l'ancre est nulle. En effet, soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une fibre type de $A \to M$. Alors $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ induit un crochet de Lie sur le module des sections globales $\Gamma(A)$ donné par $[u, v]_x = [u_x, v_x]_{\mathfrak{g}}$, pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et $x \in M$. Ce crochet est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire puisque

$$[fu, v]_x = \big[f(x)u_x, v_x\big]_{\mathfrak{g}} = f(x)[u_x, v_x]_{\mathfrak{g}} = \big(f[u, v]\big)_x,$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $x \in M$. Par conséquent l'ancre est nulle d'après (1.1). Les fibrés vectoriels en algèbres de Lie sont étudiés dans [Mac05, section 3.3] et dans [Gü10].

Lemme 1.2.3 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie d'ancre a nulle. Alors $\mathcal{A}$ est un fibré en algèbres de Lie.

Preuve : L'ancre étant nulle, $[\cdot,\cdot]$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire d'après (1.1) et (1.2). Montrons alors que l'on peut équiper chaque fibre A_x d'une structure d'algèbre de Lie. Tout d'abord remarquons que $[\cdot,\cdot]$ agit ponctuellement, c'est-à-dire étant donné $v \in \Gamma(A)$ et $x \in M$ tels que $v_x = 0$ alors $[u, v] = 0$ pour tout $u \in \Gamma(A)$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ un repère local associé à un ouvert de trivialisation locale U contenant x, où k est le rang de $A \to M$. Soit $v \in \Gamma(U, A)$ et $x \in M$ tels que $v_x = 0$, on décompose v en une somme $v = \sum_{i=1}^k v^i e_i$ où les fonctions $v^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ sont nulles en x. D'après les lemmes d'extension usuels ([Lee13, lemme 2.26] et [Lee13, lemme 10.12]), il existe $\widetilde{e_i} \in \Gamma(M, A)$ coïncidant avec e_i sur U et $\widetilde{v}^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ coïncidant avec v^i sur U. Alors $v = \sum_{i=1}^k \widetilde{v}^i \widetilde{e_i}$ et pour tout $u \in \Gamma(U, A)$

$$[u, v]_x = \sum_{i=1}^k \widetilde{v}^i(x)[u, \widetilde{e_i}]_x = \sum_{i=1}^k v^i(x)[u, \widetilde{e_i}]_x = 0.$$

On définit à présent une opération $\{\cdot, \cdot\} : A_x \times A_x \to A_x$ $\mathbb{R}$-bilinéaire par

$$\{\xi, \eta\} = \left[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\right]_x$$

où $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ sont des extensions globales de ξ, η. Puisque $[\cdot, \cdot]$ agit ponctuellement au sens précédent, $\{\xi, \eta\}$ ne dépend pas des extensions choisies et $\{\cdot, \cdot\}$ est une opération bien définie. Reste à vérifier l'identité de Jacobi, ce qui découle de

$$\{\xi, \{\zeta, \eta\}\} = \left[\widetilde{\xi}, \widetilde{\{\zeta, \eta\}}\right]_x = \left[\widetilde{\xi}, \left[\widetilde{\zeta}, \widetilde{\eta}\right]\right]_x. \qquad \square$$

Exemple 1.2.4 : L'algébroïde de Lie *canonique* sur une variété M est $\mathcal{T}_M = (TM \to M, \mathrm{Id}, [\cdot, \cdot])$ où le crochet est le crochet de Lie des champs de vecteurs sur M (voir [Lee13, chapitre 8]).

Exemple 1.2.5 : Soit M une variété et $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ un bivecteur tel que $[\pi, \pi]_{\mathsf{SN}} = 0$ pour le crochet de Schouten-Nijenhuis [LGPV13, section 3.3]. Alors (M, π) est une variété de Poisson [LGPV13, section 1.3.2] et $T^\vee M \to M$ peut être équipé d'une structure d'algébroïde de Lie (voir [Mar08, section 6.2]) d'ancre a_π donnée pour toute 1-forme α par

$$\mathsf{a}_\pi(\alpha) \cdot f = \pi(\alpha, \mathbf{d}f).$$

En notant $\pi^\sharp : \Gamma(T^\vee M) \to \Gamma(TM)$ l'application définie par $\pi^\sharp(\alpha)(\beta) = \pi(\alpha, \beta)$, on obtient $\mathsf{a}_\pi = \pi^\sharp$. En particulier $\mathsf{a}_\pi(\mathbf{d}f) = \pi^\sharp(\mathbf{d}f) = \{f, \cdot\}$ ($\{\cdot, \cdot\}$ désignant le crochet de Poisson associé à π, voir [LGPV13, sections 1.3.2 et 1.1.1]) est l'opposé du champ de vecteurs *hamiltonien* associé à f que l'on notera X_f, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Le flot de ce champ laisse invariant le bivecteur π d'après l'identité de Jacobi graduée pour $[\cdot, \cdot]_{\mathsf{SN}}$. Le crochet de Lie sur $\Omega^1(M) = \Gamma(T^\vee M)$ est donné pour toutes 1-formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ par

$$[\alpha, \beta]_\pi = \mathscr{L}_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - \mathscr{L}_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathbf{d}\big(\pi(\alpha, \beta)\big). \tag{1.3}$$

L'identité de Jacobi pour $[\cdot, \cdot]_\pi$ équivaut à $[\pi, \pi]_{\mathsf{SN}} = 0$. On notera $\mathcal{P}_M[\pi] = (T^\vee M \to M, \mathsf{a}_\pi, [\cdot, \cdot]_\pi)$ cet algébroïde de Lie.

Exemple 1.2.6 : Soit M une variété et soit $\theta \in \Omega^3(M)$ $\mathbf{d}$-fermée. Soit $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$; notons $\pi^\sharp : \Gamma(T^\vee M) \to \Gamma(TM)$ l'application définie par $\pi^\sharp(\alpha)(\beta) = \pi(\alpha, \beta)$. Si le bivecteur π satisfait la relation

$$[\pi, \pi] = \Lambda^3 \pi^\sharp(\theta),$$

on dit que (M, π, θ) est une *variété de Poisson tordue* par θ. En posant $\{f, g\} = \pi(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g)$ pour toutes fonctions lisses f et g, on a en toute généralité que $\{\cdot, \cdot\}$ n'est pas un crochet de Poisson car l'identité de Jacobi n'est plus satisfaite ; elle est remplacée par

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \theta\big(X_f, X_g, X_h\big),$$

où X_f désigne le champ de vecteurs $-\{f, \cdot\}$ associé à la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$; généralement, le flot de ce champ ne laisse plus invariant le bivecteur π. Cependant $\Gamma(T^\vee M)$ peut être équipé d'une structure d'algébroïde de Lie similaire à celle de l'exemple précédent, le crochet étant défini par

$$[\alpha, \beta]_{\pi,\theta} = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathbf{d}\big(\pi(\alpha, \beta)\big) + \boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\beta)}\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\alpha)}\theta,$$

pour toutes 1-formes α et β. On notera $\mathcal{P}_M[\pi, \theta] = (T^\vee M \to M, \mathsf{a}_\pi, [\cdot, \cdot]_{\pi,\theta})$ cet algébroïde de Lie ; voir [ŠW01], [KSLG05, section 4.2] et [Roy02b].

Exemple 1.2.7 : De la même manière que l'on peut associer une algèbre de Lie à un groupe de Lie par différentiation, partant d'un groupoïde de Lie [Mac05, section 1.1] on peut lui associer par différentiation un algébroïde de Lie [Mac05, section 3.5]. Il existe des obstructions à l'intégration d'un algébroïde de Lie donné en un groupoïde de Lie [CF03].

Les trois exemples qui suivent sont des cas particuliers de l'exemple précédent.

Exemple 1.2.8 : Soit M une variété et G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_\mathfrak{g})$. Sur le fibré vectoriel $TM \oplus (M \times \mathfrak{g}) \to M$ on a une structure d'algébroïde de Lie [Mac05, exemple 3.5.13] d'ancre $\mathsf{a}(X \oplus u) = X$ pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $u \in \Gamma(M \times \mathfrak{g})$ et de crochet

$$[X \oplus u, Y \oplus v] = [X, Y] \oplus [u, v]_\mathfrak{g} + X \cdot v - Y \cdot u,$$

où le point $\cdot$ à droite désigne l'action des champs de vecteurs composante par composante. Il est possible de montrer que cet algébroïde de Lie provient par différentiation d'un certain groupoïde de Lie construit sur l'ensemble $M \times G \times M$ [Mac05, exemple 1.1.7].

Exemple 1.2.9 : Soit M une variété sur laquelle agit (infinitésimalement) une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_\mathfrak{g})$, à travers un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$. Sur le fibré vectoriel trivial $M \times \mathfrak{g} \to M$ on a une structure d'algébroïde de Lie [Mac05, exemple 3.3.7] d'ancre $\mathsf{a}\big((x, \xi)\big) = \rho(\xi)_x$ et de crochet donné sur des sections $u, v \in \Gamma(M \times \mathfrak{g}) \cong \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g})$ par

$$[u, v]_x = [u_x, v_x]_\mathfrak{g} + \big[\rho(u_x) \cdot v\big]_x - \big[\rho(v_x) \cdot u\big]_x,$$

où le point $\cdot$ à droite désigne l'action des champs de vecteurs composante par composante ; plus succinctement on écrira

$$[u, v] = [u, v]_\mathfrak{g} + \rho(u) \cdot v - \rho(v) \cdot u,$$

pour tous $u, v \in \Gamma(M \times \mathfrak{g})$. Cet algébroïde de Lie est appelé *algébroïde de Lie d'action*. Il provient par différentiation du *groupoïde de Lie d'action* [Mac05, exemple 1.1.9] si l'action (infinitésimale) provient d'une action (globale) $G \to \mathbf{Dif}(M)$ [Mac05, exemple 3.5.14].

Exemple 1.2.10 : Soit G un groupe de Lie et $\pi : P \to M$ un fibré G-principal, notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Alors d'après [Mac05, proposition 3.2.3] on a la suite exacte courte de fibrés vectoriels de base M suivante :

$$0 \longrightarrow P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g} \longrightarrow TP/G \xrightarrow{\overline{\mathbf{d}\pi}} TM \longrightarrow 0,$$

où $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ est le fibré adjoint de $P \to M$ (voir [Nee08, proposition 5.1.6]). Ce fibré vectoriel est associé au fibré principal au moyen de l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. Les sections de $TP/G \to M$ peuvent être identifiées aux champs de vecteurs sur P qui sont G-invariants [Mac05, proposition 3.1.4]. Pour le crochet des champs de vecteurs sur P et l'ancre $\overline{\mathbf{d}\pi}$, le fibré vectoriel $TP/G \to M$ est un algébroïde de Lie connu sous le nom d'*algébroïde d'Atiyah* [Ati57], [Mac05, section 3.2]. D'après [Kob57] un scindement de cette suite exacte correspond à une connexion sur $P \to M$. L'algébroïde de Lie du groupoïde de jauge d'Ehresmann associé au fibré principal $P \to M$ est l'algébroïde d'Atiyah de $P \to M$ (voir [Kub89] et les références mentionnées dans cet article).

Exemple 1.2.11 : Soit $A \to M$ une distribution involutive de $TM \to M$, c'est-à-dire un sous-fibré vectoriel de $TM \to M$ tel que pour tous $u, v \in \Gamma(A)$, $[u, v] \in \Gamma(A)$ (voir [Lee13, chapitre 19]). D'après le théorème de Frobenius global ([Lee13, théorème 19.21]) on a un feuilletage $\mathcal{F}$ associé : une section de $A \to M$ est un champ de vecteurs tangent à (une feuille de) $\mathcal{F}$. On a alors une structure d'algébroïde de Lie ([Mac05, exemple 3.3.5], [Fer02]) sur $A \to M$, d'ancre l'inclusion $A \hookrightarrow TM$, pour le crochet de Lie des champs de vecteurs restreint à $\Gamma(A)$, l'involutivité assurant que cette restriction est bien à valeurs dans $\Gamma(A)$. On notera cet algébroïde $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.12 : Une *algèbre de Lie quadratique* est une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ munie d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non dégénérée invariante pour l'action adjointe, c'est-à-dire satisfaisant la propriété

$$\big\langle [x, y], z \big\rangle + \big\langle y, [x, z] \big\rangle = 0,$$

pour tous x, y et $z \in \mathfrak{g}$.

Exemple 1.2.13 : D'après le critère de Cartan ([Ser06, théorème 2.1, partie A]), toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ munie de sa forme de Killing, définie par $\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ pour tous x et $y \in \mathfrak{g}$, est une algèbre de Lie quadratique.

Définition 1.2.14 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie. On dit que $\mathcal{A}$ est un algébroïde de Lie *quadratique* si et seulement si le sous-fibré vectoriel $\mathrm{Ker}\, \mathsf{a} \to M$ de $A \to M$ est équipé d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non dégénérée, telle que

$$\mathsf{a}(u) \cdot \langle a, b \rangle = \big\langle [u, a], b \big\rangle + \big\langle a, [u, b] \big\rangle,$$

pour tous $u \in \Gamma(A)$ et $a, b \in \Gamma(\mathrm{Ker}\, \mathsf{a})$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, \mathsf{a} \to M$ est un fibré en algèbres de Lie quadratiques.

Exemple 1.2.15 : Reprenons les notations de l'exemple 1.2.10 concernant l'algébroïde d'Atiyah associé au fibré G-principal $P \to M$. Supposons de plus que $\mathfrak{g}$ soit quadratique, et notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ la forme bilinéaire associée. Rappelons que $\Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) \cong \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})^G$

(voir par exemple [Nee08, proposition 1.6.3]). Par conséquent $\Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par la formule $\langle u,v\rangle_x = \langle u_x, v_x\rangle_{\mathfrak{g}}$ pour tous u, $v \in \mathcal{C}^\infty(P,\mathfrak{g})^G$ et $x \in P$. Pour tous $X \in \Gamma(TP/G)$ et $Y, Z \in \Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ on a

$$X \cdot \langle Y, Z\rangle = \langle X \cdot Y, Z\rangle + \langle Y, X \cdot Z\rangle = \big\langle [X,Y], Z\big\rangle + \big\langle Y, [X,Z]\big\rangle,$$

où à la dernière étape on a utilisé [Nee08, lemme 5.1.7]. Ainsi, en ajoutant l'hypothèse que $\mathfrak{g}$ est quadratique, l'algébroïde d'Atiyah du G-fibré principal $P \to M$ est un algébroïde de Lie quadratique ([BH15, section 3.1]).

1.3 Morphismes d'algébroïdes de Lie

On commence par définir un morphisme d'algébroïdes de Lie qui couvre l'identité ; le cas général, plus compliqué, est présenté par la suite.

Définition 1.3.1 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie au-dessus de la *même* base. Un *morphisme* entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, couvrant l'identité, est la donnée d'un morphisme $\Phi : A \to B$ entre les fibrés vectoriels $A \to M$ et $B \to M$ couvrant l'identité et qui commute aux ancres et aux crochets au sens où

$$\mathsf{a}_A = \mathsf{a}_B \circ \Phi, \tag{1.4}$$

$$\Phi\big([u,v]_A\big) = \big[\Phi(u), \Phi(v)\big]_B, \tag{1.5}$$

pour toutes sections $u, v \in \Gamma(A)$. Dans le cas où Φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels (respectivement automorphisme) on dira que $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *isomorphisme* d'algébroïdes de Lie (respectivement *automorphisme*) puisque Φ^{-1} est un morphisme d'algébroïdes de Lie dans ce cas.

Il est clair que la composée de deux morphismes d'algébroïdes de Lie couvrant l'identité est encore un morphisme d'algébroïdes de Lie couvrant l'identité, ce qui amène à la définition suivante.

Définition 1.3.2 : Soit M une variété. La catégorie $\textsf{\textbf{AlgdLie}}(M)$ a pour objets les algébroïdes de Lie réguliers de base M et pour morphismes les morphismes entre algébroïdes de Lie réguliers de base M et couvrant l'identité.

Exemple 1.3.3 : Soit deux algébroïdes de Lie au-dessus d'un point (exemple 1.2.1), c'est-à-dire deux algèbres de Lie. Un morphisme entre les deux algébroïdes de Lie est un morphisme entre les deux algèbres de Lie.

Exemple 1.3.4 : Un morphisme entre deux fibrés en algèbres de Lie $A \to M$ et $B \to M$ est, par définition, un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : A \to B$ qui satisfait (1.5), où les crochets dans (1.5) sont ceux induits sur $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$ comme dans l'exemple 1.2.2. La condition (1.4) est trivialement vérifiée puisque les ancres sur chacun des fibrés vectoriels sont nulles (voir 1.2.2).

Exemple 1.3.5 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ un algébroïde de Lie. Alors d'après 1.1.4 l'ancre de $\mathcal{A}$ définit un morphisme d'algébroïdes de Lie $\mathsf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{T}_M$. On appellera ce morphisme le *morphisme canonique* associé à $\mathcal{A}$.

Exemple 1.3.6 : Soit M une variété et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie. Soit $\mathcal{A}$ l'algébroïde de Lie d'espace total $TM \oplus (M \times \mathfrak{g})$ et soit $\mathcal{B}$ l'algébroïde de Lie d'espace total $TM \oplus (M \times \mathfrak{h})$ (exemple 1.2.8). Considérons un morphisme $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (voir [Mac05, exemple 3.3.3]). La condition (1.4) implique que Φ s'écrive

$$\Phi(X \oplus u) = X \oplus \omega(X) + \phi(u),$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g})$; où $\omega : TM \to M \times \mathfrak{h}$ est une 1-forme différentielle sur M à valeurs dans $\mathfrak{h}$ et $\phi : M \times \mathfrak{g} \to M \times \mathfrak{h}$ est un morphisme de fibrés vectoriels. La condition (1.5) implique

$$\begin{aligned} \phi\big([u, v]_{\mathfrak{g}}\big) &= \big[\phi(u), \phi(v)\big]_{\mathfrak{h}}, \\ \delta\omega(X, Y) + \big[\omega(X), \omega(Y)\big]_{\mathfrak{h}} &= 0, \\ X \cdot \phi(u) - \phi(X \cdot v) + \big[\omega(X), \phi(v)\big]_{\mathfrak{h}} &= 0, \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g})$, où δ est la différentielle définie sur $\Omega^\bullet(M) \otimes \mathfrak{h}$ par $\delta(\alpha \otimes \xi) = \mathbf{d}\alpha \otimes \xi$ pour tous $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ et $\xi \in \mathfrak{h}$. La première condition signifie que ϕ est un morphisme de fibrés en algèbres de Lie, la seconde que ω est une forme de Maurer-Cartan (voir [Car04]), et la dernière est une relation de compatibilité.

Définition 1.3.7 : La catégorie $\textsf{\textbf{FibLie}}(M)$ a pour objets les fibrés en algèbres de Lie de base M et pour morphismes les morphismes entre deux fibrés en algèbres de Lie de base M, c'est-à-dire les morphismes entre les fibrés vectoriels sous-jacents satisfaisant en plus la condition (1.5).

Proposition 1.3.8 : On a un foncteur $\textsf{\textbf{K}} : \textsf{\textbf{AlgdLie}}(M) \to \textsf{\textbf{FibLie}}(M)$, qui à un algébroïde de Lie $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ associe $\textsf{\textbf{K}}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} \mathsf{a}_A \to M$ et qui à un morphisme d'algébroïdes de Lie $\Phi : A \to B$ entre $\mathcal{A}$ et un second algébroïde de Lie $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ associe la restriction $\textsf{\textbf{K}}(\Phi) : \operatorname{Ker} \mathsf{a}_A \to \operatorname{Ker} \mathsf{a}_B$.

Preuve : Ayant pris pour convention de travailler avec des fibrés vectoriels de rang constant (voir les conventions), $\textsf{\textbf{K}}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} \mathsf{a}_A \to M$ est un sous-fibré vectoriel de $A \to M$. La restriction de a_A à ce fibré vectoriel lui confère une ancre nulle, et enfin la restriction du crochet $[\cdot,\cdot]_A$ lui confère une structure de fibré en algèbres de Lie d'après le lemme 1.2.3. Φ restreint à $\operatorname{Ker} \mathsf{a}_A$ prend ses valeurs dans $\operatorname{Ker} \mathsf{a}_B$ d'après (1.4) et $\textsf{\textbf{K}}(\mathcal{B}) = \operatorname{Ker} \mathsf{a}_B \to M$ est également un fibré en algèbres de Lie ; (1.5) montre que $\textsf{\textbf{K}}(\Phi)$ est un morphisme de fibrés en algèbres de Lie. □

A présent traitons succinctement le cas général (voir [HM90] et également [Mac05, section 4.3]). Pour ce faire rappelons quelques faits sur les fibrés vectoriels. Soit $\pi : V \to M$ et $\varpi : W \to M$ deux fibrés vectoriels et soit $\Phi : V \to W$ un morphisme entre ces deux fibrés vectoriels couvrant l'identité. Alors Φ induit un morphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules $\Gamma(V) \to \Gamma(W)$, $s \mapsto \Phi \circ s$, noté encore Φ d'après nos conventions. Si on considère à présent un morphisme de fibrés vectoriels ne couvrant pas l'identité, cette application n'est pas définie de manière générale. Soit $V \to M$ et $W \to N$ deux fibrés vectoriels et soit $(\varphi, \Phi) : V \to W$ un morphisme entre ces deux fibrés vectoriels. Rappelons la construction du fibré vectoriel tiré en arrière $\varphi^! W \to M$ de $W \to N$ le long de φ

$$\begin{tikzcd} \varphi^! W \arrow[r, "\varphi^!"] \arrow[d, "\varpi^!"'] & W \arrow[d, "\varpi"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}.$$

L'espace total est $\varphi^! W = \{(x, w) \in M \times W : \varpi(w) = \varphi(x)\}$ et les applications $\varpi^!$ et $\varphi^!$ sont les projections naturelles données par $\varpi^!(x, w) = x$ et $\varphi^!(x, w) = w$. Alors $\varpi^! : \varphi^! W \to M$ est un fibré vectoriel (voir [Hus94, proposition 3.1, chapitre 3]). Étant donnée une section $u \in \Gamma(W)$ on a une section $\varphi^! u \in \Gamma(\varphi^! W)$ définie par $(\varphi^! u)_x = u_{\varphi(x)}$ pour tout $x \in M$ et appelée *tiré en arrière* de u. D'après [GHV72, section 2.26] on a un isomorphisme σ de $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules

$$\sigma : \mathcal{C}^\infty(M) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(N)} \Gamma(W) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\varphi^! W), \quad a \otimes s \mapsto a(s \circ \varphi), \tag{1.6}$$

où la structure de $\mathcal{C}^\infty(N)$-module sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ est donnée par $ab = (a \circ \varphi)b$ pour tous $a \in \mathcal{C}^\infty(N)$ et $b \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Par conséquent, à travers l'isomorphisme σ^{-1}, on peut décomposer $\Phi(u) \in \Gamma(\varphi^! W)$ avec $u \in \Gamma(V)$ en une somme à support fini

$$\Phi(u) = \sum_i u_i \otimes s_i,$$

où $u_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $s_i \in \Gamma(W)$; mais cette décomposition n'est pas unique.

Définition 1.3.9 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to N, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie et soit $\varphi : M \to N$ une application lisse. Un *morphisme d'algébroïdes de Lie* $(\varphi, \Phi) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme de fibrés vectoriels $(\varphi, \Phi) : A \to B$ tel que

$$\mathbf{d}\varphi \circ \mathsf{a}_A = \mathsf{a}_B \circ \Phi, \tag{1.7}$$

et tel que pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et des décompositions

$$\Phi(u) = \sum_i u_i \otimes r_i, \quad \Phi(v) = \sum_i v_i \otimes s_i,$$

avec $u_i, v_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $r_i, s_i \in \Gamma(B)$, on ait

$$\Phi\big([u,v]_A\big) = \sum_{i,j} u_i v_j \otimes [r_i, s_j]_B + \sum_j \big(\mathsf{a}_A(u) \cdot v_j\big) \otimes s_j - \sum_i \big(\mathsf{a}_A(v) \cdot u_i\big) \otimes r_i. \tag{1.8}$$

Ci-dessus le membre de gauche $\Phi\big([u,v]_A\big)$ est à interpréter comme section du fibré vectoriel $\varphi^! B \to M$, à l'instar de $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$ plus haut.

Remarque 1.3.10 : Cette définition correspond à [HM90, définition 1.3]. Le fait que le membre de droite de la relation (1.8) soit indépendant des décompositions choisies est le contenu de [HM90, lemme 1.4]. De plus, une longue vérification montre que la composition de deux morphismes d'algébroïdes de Lie $(\varphi, \Phi) \circ (\psi, \Psi) = (\varphi \circ \psi, \Phi \circ \Psi)$ est encore un morphisme d'algébroïdes de Lie.

Définition 1.3.11 : La catégorie **AlgdLie** a pour objets les algébroïdes de Lie réguliers et pour morphismes les morphismes entre deux algébroïdes de Lie réguliers.

Remarque 1.3.12 : Reprenons les notations de la définition précédente. Dans le cas où $M = N$ et $\varphi = \mathrm{Id}$, alors pour toute section $u \in \Gamma(A)$ la section $\Phi(u)$ considérée comme élément de $\Gamma(\varphi^! B)$ admet pour décomposition $1 \otimes \Phi(u)$ avec $\Phi(u)$ considérée comme élément de $\Gamma(B)$. Par conséquent la relation (1.7) est réduite à (1.4) et la relation (1.8) est réduite à (1.5). Étant donné M une variété, la catégorie **AlgdLie**(M) est une sous-catégorie de **AlgdLie**.

Exemple 1.3.13 : Soit M et N deux variétés et $\varphi : M \to N$ une application lisse. Alors $\mathbf{d}\varphi : TM \to TN$ induit un morphisme d'algébroïdes de Lie $\mathbf{d}\varphi : \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_N$ ([Mac05, proposition 4.3.3]).

Preuve : Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$ avec les décompositions suivantes :

$$(\mathbf{d}\varphi)(X) = \sum_i f_i \otimes X_i, \text{ avec } f_i \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ et } X_i \in \Gamma(TN),$$
$$(\mathbf{d}\varphi)(Y) = \sum_j g_j \otimes Y_j, \text{ avec } g_j \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ et } Y_j \in \Gamma(TN).$$

Calculons $\mathbf{d}\varphi\Big([X,Y]_{TM}\Big)$. Par définition on a, pour toute fonction $w \in \mathcal{C}^\infty(N)$, que

$$\mathbf{d}\varphi\Big([X,Y]_{TM}\Big) \cdot w = [X,Y]_{TM} \cdot (w \circ \varphi) = X \cdot \big(Y \cdot (w \circ \varphi)\big) - Y \cdot \big(X \cdot (w \circ \varphi)\big).$$

D'après l'isomorphisme (1.6) on a

$$X \cdot (w \circ \varphi)_x = \mathbf{d}(w \circ \varphi)_x(X) = \mathbf{d}w_{\varphi(x)} \left(\sum_i f_i X_i|_{\varphi(x)} \right) = \sum_i f_i (X_i \cdot w)|_{\varphi(x)},$$

d'où l'on déduit que $X \cdot (w \circ \varphi) = \sum_i f_i\big((X_i \cdot w) \circ \varphi\big)$ et de manière similaire $Y \cdot (w \circ \varphi) = \sum_j g_j\big((X_j \cdot w) \circ \varphi\big)$. Puisque X est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$ on obtient

$$X \cdot \big(Y \cdot (w \circ \varphi)\big) = \sum_j (X \cdot g_j)\big((Y_j \cdot w) \circ \varphi\big) + \sum_{i,j} f_i g_j\big((X_i \cdot (Y_j \cdot w)\big)\big),$$

et de manière analogue

$$Y \cdot \big(X \cdot (w \circ \varphi)\big) = \sum_i (Y \cdot f_i)\big((X_i \cdot w) \circ \varphi\big) + \sum_{i,j} f_i g_j\big((Y_j \cdot (X_i \cdot w)\big)\big).$$

On en déduit finalement que

$$\mathbf{d}\varphi\Big([X,Y]_{TM}\Big) = \sum_{i,j} f_i g_j \otimes [X_i, Y_j]_{TN} + \sum_j (X \cdot g_j) \otimes Y_j - \sum_i (Y \cdot f_i) \otimes X_i. \quad \square$$

Définition 1.3.14 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et soit $F \to N$ un sous-fibré vectoriel de $A \to M$ (voir [Hus94, chapitre 2, définition 1.3]), N étant une sous-variété de M. On dira que $F \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{A}$ si :

- pour tout $u \in F$, $\mathsf{a}(u) \in TN$,
- pour toutes sections $u, v \in \Gamma(A)$ telles que $u|_N, v|_N \in \Gamma(F)$, alors $[u, v]|_N \in \Gamma(F)$.

Dans la définition ci-dessus, on équipe $F \to N$ de l'ancre a de $\mathcal{A}$ restreinte à F et du crochet $[\cdot, \cdot]$ de $\mathcal{A}$ restreint à $\Gamma(F)$; muni de cette ancre et de ce crochet $F \to N$ est un algébroïde de Lie et

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ N \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

est un morphisme d'algébroïdes de Lie.

1.4 Cohomologie d'un algébroïde de Lie

Définition 1.4.1 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie. On notera $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{Z}$-graduée commutative $\big(\Gamma(\Lambda^\bullet A^\vee), \wedge\big)$. Ses éléments sont appelés *formes différentielles sur* $\mathcal{A}$.

Proposition 1.4.2 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot, \cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to N, \mathsf{a}_B, [\cdot, \cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie et soit (φ, Φ) un morphisme entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (voir définition 1.3.9). Alors (φ, Φ) induit un morphisme de $\mathcal{C}^\infty(N)$-modules $(\varphi, \Phi)^\natural : \Omega^\bullet(\mathcal{B}) \to \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ défini pour tout $x \in M$, $u_1, \ldots, u_p \in \Gamma(A)$ et $\beta \in \Omega^p(\mathcal{B})$ par

$$\big[(\varphi, \Phi)^\natural \beta\big]_x(u_1, \ldots, u_p) = \beta_{\varphi(x)}\big(\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_p)\big),$$

satisfaisant pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{B})$ la relation

$$(\varphi, \Phi)^\natural(\alpha \wedge \beta) = \big[(\varphi, \Phi)^\natural \alpha\big] \wedge \big[(\varphi, \Phi)^\natural \beta\big].$$

Soit (φ, Φ) un morphisme entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et soit (ψ, Ψ) un morphisme entre $\mathcal{B}$ et un autre algébroïde de Lie $\mathcal{C}$. Alors $(\varphi, \Phi) \circ (\psi, \Psi)$ est un morphisme entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ et

$$\big[(\varphi, \Phi) \circ (\psi, \Psi)\big]^\natural = (\psi, \Psi)^\natural \circ (\varphi, \Phi)^\natural.$$

Remarque 1.4.3 : Dans le cas d'un morphisme $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux algébroïdes de Lie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ au-dessus d'une même base (voir définition 1.3.1), on notera $\Phi^\natural$ le morphisme de modules $(\mathrm{Id}, \Phi)^\natural : \Omega^\bullet(\mathcal{B}) \to \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ de la proposition précédente.

Ci-après nous présentons succinctement trois opérateurs sur un algébroïde de Lie, similaires à la dérivée extérieure, la dérivée de Lie et le produit intérieur agissant sur les formes différentielles d'une variété. Des références sur ce sujet sont [ELW99, section 2], [Mac05, section 7.1], [DZ11, section 8.6], [Cra03, section 1.4] et [Mar08, section 5], voir également [Car09, sections 2.5 et 2.7].

Définition 1.4.4 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. La *dérivée extérieure* de $\mathcal{A}$ est l'application $\mathrm{d} : \Omega^p(\mathcal{A}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{A})$ définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(u_0, \dots, u_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \mathsf{a}(u_i) \cdot \alpha(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \alpha\big([u_i, u_j], u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p\big), \end{aligned} \quad (1.9)$$

pour tous $u_0, \dots, u_p \in \Gamma(A)$ et tout $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$; où $\mathsf{a}(u_i) \cdot \alpha(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p)$ désigne l'action du champ de vecteurs $\mathsf{a}(u_i)$ sur la fonction $\alpha(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_p)$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ elle est définie par $(\mathrm{d}f)(u) = \mathsf{a}(u) \cdot f$, pour tout $u \in \Gamma(A)$.

Définition 1.4.5 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Pour $u \in \Gamma(A)$, la *dérivée de Lie* de $\mathcal{A}$ est l'application $\mathscr{L}_u : \Omega^p(\mathcal{A}) \to \Omega^p(\mathcal{A})$ définie par

$$\mathscr{L}_u \alpha(v_1, \dots, v_p) = \mathsf{a}(u) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_p) - \sum_{i=1}^{p} \alpha\big(v_1, \dots, [u, v_i], \dots, v_p\big),$$

pour tous $u, v_1, \dots, v_p \in \Gamma(A)$ et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ elle est définie par $\mathscr{L}_u f = \mathsf{a}(u) \cdot f = \mathrm{d}f(u)$, pour tout $u \in \Gamma(A)$.

Définition 1.4.6 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Pour $u \in \Gamma(A)$, le *produit intérieur* de $\mathcal{A}$ est l'application $\iota_u : \Omega^p(\mathcal{A}) \to \Omega^{p-1}(\mathcal{A})$ définie par

$$\iota_u \alpha(u_2, \dots, u_p) = \alpha(u, u_2, \dots, u_p),$$

pour tous $u, u_2, \dots, u_p \in \Gamma(A)$ et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ il est défini par $\iota_u f = 0$, pour tout $u \in \Gamma(A)$.

Théorème 1.4.7 ([Mar08, section 5]) **:** Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ un algébroïde de Lie. La dérivée extérieure de $\mathcal{A}$ est une dérivation de degré 1 de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$, la dérivée de Lie de $\mathcal{A}$ est une dérivation de degré 0 de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ et le produit intérieur de $\mathcal{A}$ est une dérivation de degré -1 de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$. Ces dérivations satisfont les relations

$$\begin{gathered} \big[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v\big] = \mathscr{L}_{[u,v]_A}, \quad \big[\mathscr{L}_u, \iota_v\big] = \iota_{[u,v]_A}, \quad \big[\iota_u, \mathrm{d}\big] = \mathscr{L}_u, \\ \big[\mathscr{L}_u, \mathrm{d}\big] = 0, \quad \big[\mathrm{d}, \mathrm{d}\big] = 0, \quad \big[\iota_u, \iota_v\big] = 0, \end{gathered}$$

où dans les membres de gauche $[\cdot,\cdot]$ désigne le commutateur gradué sur $\operatorname{Der}\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\mathbb{Z}$-gradué des dérivations de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Remarque 1.4.8 : Ces relations sont connues sous le nom d'*équations de Weil* ou *relations de Cartan* en géométrie différentielle. De $[\mathrm{d}, \mathrm{d}] = 0$ on tire que la dérivée extérieure de $\mathcal{A}$ est une différentielle, conférant à $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ une structure d'algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée commutative.

Définition 1.4.9 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Pour tout $u \in \Gamma(A)$, le triplet d'opérateurs $(\mathscr{L}_u, \mathrm{d}, \iota_u)$ est appelé *triplet de Cartan* ou (*opérations de Cartan* dans la terminologie de [GHV76, chapitre 7]) de $\mathcal{A}$ associé à u.

Dans ce qui suit on désignera par **AGC** (respectivement **ADGC**) la catégorie des algèbres $\mathbb{Z}$-graduées commutatives (respectivement la catégorie des algèbres différentielles $\mathbb{Z}$-graduées commutatives). Ces catégories sont définies dans [FHT01, partie 1, chapitre 3].

Proposition 1.4.10 : On a un foncteur contravariant $\mathbf{\Omega} : \mathsf{AlgdLie} \to \mathsf{ADGC}$ défini sur les objets par $\mathbf{\Omega}(\mathcal{A}) = \big(\Omega^\bullet(\mathcal{A}), \mathrm{d}\big)$ et sur les morphismes par $\mathbf{\Omega}(\varphi, \Phi) = (\varphi, \Phi)^\natural$.

Preuve : Il s'agit d'une conséquence de la proposition 1.4.2 et du théorème 1.4.7. □

Définition 1.4.11 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. La *cohomologie* $H^\bullet(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est définie comme l'homologie de l'algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée commutative $\big(\Omega^\bullet(\mathcal{A}), \mathrm{d}\big)$.

Proposition 1.4.12 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to N, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie et soit (φ, Φ) un morphisme entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On a la relation

$$(\varphi, \Phi)^\natural \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B \circ (\varphi, \Phi)^\natural,$$

où d_A (respectivement d_B) désigne la différentielle de $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$).

Remarque 1.4.13 : Il est intéressant de noter que si l'on dispose d'un morphisme de fibrés vectoriels $(\varphi, \Phi) : A \to B$, tel que l'application induite $(\varphi, \Phi)^\natural : \Omega^\bullet(\mathcal{B}) \to \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ satisfait la relation $(\varphi, \Phi)^\natural \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B \circ (\varphi, \Phi)^\natural$, alors (φ, Φ) est un morphisme d'algébroïdes de Lie entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Ceci a été montré dans [BKS05, proposition 2].

Proposition 1.4.14 : On a un foncteur covariant $\mathbf{H} : \mathsf{AlgdLie}^{\mathrm{opp}} \to \mathsf{AGC}$ défini sur les objets par $\mathbf{H}(\mathcal{A}) = H^\bullet(\mathcal{A})$ et sur les morphismes par $\mathbf{H}(\varphi, \Phi) = (\varphi, \Phi)^\natural$.

Preuve : La structure d'algèbre commutative graduée sur $H^\bullet(\mathcal{A})$ est issue du produit extérieur dont est muni $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$. En effet, posons $[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta]$, pour $\omega \in \Omega^p(\mathcal{A})$ et $\eta \in \Omega^q(\mathcal{A})$ d-fermées. Alors $\omega \wedge \eta$ est d-fermée puisque d est une dérivation de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ d'après le théorème 1.4.7, et $[\omega] \wedge [\eta]$ ne dépend pas des représentants choisis puisque

$$(\omega + \mathrm{d}\alpha) \wedge (\eta + \mathrm{d}\beta) = \omega \wedge \eta + \mathrm{d}\big(\alpha \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \beta + \alpha \wedge \mathrm{d}\beta\big).$$

Enfin, l'application $\mathbf{H}(\varphi, \Phi)$ passe à la cohomologie d'après la proposition 1.4.12. □

Une étude approfondie de la cohomologie des algébroïdes de Lie est proposée dans [Mac05, chapitre 7], notamment concernant le lien entre la cohomologie d'un groupoïde de Lie et la cohomologie de l'algébroïde de Lie associé ; nous ne donnons ci-après que quelques exemples simples.

Exemple 1.4.15 : Soit $\mathcal{A}$ l'algébroïde de Lie provenant d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (exemple 1.2.1). Alors $H^\bullet(\mathcal{A})$ correspond à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ (voir [CE48, section 14]).

Exemple 1.4.16 : Soit $\mathcal{T}_M$ l'algébroïde de Lie canonique associé à une variété M (exemple 1.2.4). Alors $H^\bullet(\mathcal{T}_M)$ correspond à la cohomologie de De Rham de M (voir [Lee13, chapitre 17]).

Exemple 1.4.17 : Soit $\mathcal{P}_M[\pi]$ l'algébroïde de Lie associé à une variété de Poisson (M, π) (exemple 1.2.5). Alors $H^\bullet(\mathcal{P}_M[\pi])$ correspond (voir [Hue90]) à la cohomologie de Lichnerowicz-Poisson de (M, π) (voir [Lic77] et [Vai94, définition 5.1]) dont la différentielle d_π peut s'identifier à $-[\pi, \cdot]_{\mathsf{SN}}$ (voir [KSM90, proposition 6.4] ou [Vai94, proposition 4.3]).

Exemple 1.4.18 : Soit $\mathcal{F}$ l'algébroïde de Lie associé à un feuilletage (exemple 1.2.11). Alors $H^\bullet(\mathcal{F})$ correspond à la cohomologie tangentielle de $\mathcal{F}$ (voir [MS88, chapitre 3] et [BDD07, section 1.1.3]).

Remarque 1.4.19 : Reprenons les notations de l'exemple précédent. Le triplet de Cartan associé à l'algébroïde de Lie de l'exemple précédent sera *abusivement* noté $(\boldsymbol{\mathcal{L}}_X, \mathbf{d}, \boldsymbol{\iota}_X)$ pour tout $X \in \Gamma(F)$, où $F \to M$ est la distribution involutive associée au feuilletage $\mathcal{F}$, et ceci dans toute la suite du texte.

Remarque 1.4.20 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie. Alors le morphisme d'algébroïdes de Lie $\mathsf{a} : \mathcal{A} \to \mathcal{T}_M$ (voir exemple 1.3.5) fournit canoniquement un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z}$-graduées commutatives $\mathbf{H}(\mathsf{a}^\natural) : \mathbf{H}^\bullet(M) \to H^\bullet(\mathcal{A})$, induit par $\mathsf{a}^\natural : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

1.5 Représentations d'un algébroïde de Lie

Définition 1.5.1 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie et $V \to M$ un fibré vectoriel. On notera $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ l'espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $\Gamma(\Lambda^\bullet A^\vee \otimes V)$. Ses éléments sont appelés *formes différentielles sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $V \to M$*. En degré 0, on retrouve le module des sections de $V \to M$.

Proposition 1.5.2 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie et $V \to M$ un fibré vectoriel. Alors $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ est équipé d'une structure de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$-module $\mathbb{Z}$-gradué définie par

$$\alpha \wedge (\beta \otimes s) = (\alpha \wedge \beta) \otimes s,$$
$$(\beta \otimes s) \wedge \alpha = (\beta \wedge \alpha) \otimes s,$$
$$\alpha \wedge s = s \wedge \alpha = \alpha \otimes s,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ et $s \in \Gamma(V)$.

Définition 1.5.3 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie. Une *$\mathcal{A}$-connexion* ([DZ11, définition 8.4.7], [Fer02, section 0], [ELW99, section 2]) sur $V \to M$ est une application $\nabla : \Gamma(V) \to \Gamma(A^\vee \otimes V)$ $\mathbb{R}$-linéaire satisfaisant les relations

$$\nabla_u(fs) = \big[\mathsf{a}(u) \cdot f\big] s + f \nabla_u s,$$
$$\nabla_{fu} s = f \nabla_u s,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et sections $u \in \Gamma(A)$ et $s \in \Gamma(V)$, où l'on a posé $\nabla_u s = \iota_u \nabla s$ pour tous $u \in \Gamma(A)$ et $s \in \Gamma(V)$.

De manière analogue à la construction de la dérivée extérieure covariante sur une variété équipée d'une connexion [Lee09, théorème 12.57], on dispose d'un opérateur pour les algébroïdes de Lie équipés d'une connexion, dont l'existence est le contenu du théorème suivant (voir [ELW99, section 2]).

Théorème 1.5.4 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et soit ∇ une $\mathcal{A}$-connexion sur $V \to M$. Il existe un unique opérateur $\mathrm{d}_\nabla : \Omega^k(\mathcal{A}, V) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{A}, V)$ appelé *dérivée extérieure covariante* de $\mathcal{A}$ défini par $\mathrm{d}_\nabla s = \nabla s$ pour tout $s \in \Gamma(V)$ et

$$\mathrm{d}_\nabla(\alpha \otimes s) = \mathrm{d}\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \wedge \nabla s,$$

pour tout $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$ et $s \in \Gamma(V)$ puis étendu par $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité ; et satisfaisant les relations

$$\mathrm{d}_\nabla(\alpha \wedge \omega) = \mathrm{d}\alpha \wedge \omega + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}_\nabla \omega, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}_\nabla(\omega \wedge \alpha) = \mathrm{d}_\nabla \omega \wedge \alpha + (-1)^q \omega \wedge \mathrm{d}\alpha, \tag{1.11}$$

pour tous $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$ et $\omega \in \Omega^q(\mathcal{A}, V)$.

Remarque 1.5.5 : Cet opérateur admet également une formule intrinsèque donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\nabla \omega(u_0, \ldots, u_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \nabla_{u_i} \omega(u_0, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_p) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega\big([u_i, u_j], u_0, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, \widehat{u_j}, \ldots, u_p\big), \end{aligned} \tag{1.12}$$

pour tout $\omega \in \Omega^p(\mathcal{A}, V)$ et tous $u_0, \ldots, u_p \in \Gamma(A)$.

Proposition 1.5.6 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et soit $V \to M$ un fibré vectoriel équipé d'une $\mathcal{A}$-connexion ∇. L'application $\Gamma(A) \times \Gamma(A) \times \Gamma(V) \to \Gamma(V)$ définie par

$$(u, v, s) \mapsto \big(\nabla_u \circ \nabla_v - \nabla_v \circ \nabla_u - \nabla_{[u,v]}\big)(s)$$

est $\mathcal{C}^\infty(M)$-trilinéaire, donc il existe une 2-forme $F_\nabla \in \Omega^2(\mathcal{A}, \operatorname{End} V)$ appelée *courbure* de la $\mathcal{A}$-connexion ∇ ([DZ11, relation 8.32]) telle que

$$F_\nabla(u, v)s = \big(\nabla_u \circ \nabla_v - \nabla_v \circ \nabla_u - \nabla_{[u,v]}\big)(s),$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et $s \in \Gamma(V)$.

Définition 1.5.7 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie. Soit un fibré vectoriel $V \to M$ équipé d'une $\mathcal{A}$-connexion ∇. On dira que ∇ est *plate* si $F_\nabla = 0$.

Lemme 1.5.8 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie et soit $V \to M$ un fibré vectoriel. Alors $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, \operatorname{End} V)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, dont la multiplication est donnée par

$$(\alpha \otimes \Phi) \wedge (\beta \otimes \Psi) = (\alpha \wedge \beta) \otimes (\Phi \circ \Psi),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$ et $\Phi, \Psi \in \Gamma(\operatorname{End} V)$. De plus $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ est un $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, \operatorname{End} V)$-module à gauche $\mathbb{Z}$-gradué, la multiplication étant donnée par

$$(\alpha \otimes \Phi) \wedge (\beta \otimes s) = (\alpha \wedge \beta) \otimes \Phi(s),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$, $\Phi \in \Gamma(\operatorname{End} V)$ et $s \in \Gamma(V)$.

Proposition 1.5.9 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et soit $V \to M$ un fibré vectoriel équipé d'une $\mathcal{A}$-connexion ∇. Alors

$$\mathrm{d}_\nabla^2 \alpha = F_\nabla \wedge \alpha,$$

pour tout $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$. Par conséquent, si ∇ est plate, d_∇ est une différentielle sur $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$.

Preuve : Remarquons pour commencer que pour tout $\omega \in \Omega^1(\mathcal{A}, V)$, on a pour tous $u, v \in \Gamma(A)$

$$(\mathrm{d}_\nabla \omega)(u, v) = \nabla_u \omega(v) - \nabla_v \omega(u) - \omega\big([u, v]\big).$$

Soit $s \in \Gamma(V)$, la formule précédente pour $\omega = \nabla s \in \Omega^1(\mathcal{A}, V)$ permet d'obtenir

$$\big(\mathrm{d}_\nabla^2 s\big)(u, v) = \nabla_u \nabla_v s - \nabla_v \nabla_u s - \nabla_{[u,v]} s = F_\nabla(u, v) s = (F_\nabla \wedge s)(u, v).$$

A présent on prouve la formule pour tout tenseur élémentaire $\alpha \otimes s \in \Omega^p(\mathcal{A}, V)$. En utilisant (1.10) on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\nabla^2(\alpha \otimes s) &= \mathrm{d}_\nabla^2(\alpha \wedge s) \\
&= \mathrm{d}_\nabla\big(\mathrm{d}\alpha \wedge s + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}_\nabla s\big) \\
&= \mathrm{d}^2 \alpha \wedge s + (-1)^{p+1} \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}_\nabla s + (-1)^p \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}_\nabla s + \alpha \wedge \mathrm{d}_\nabla^2 s \\
&= \alpha \wedge (F_\nabla \wedge s) \\
&= F_\nabla \wedge (\alpha \otimes s),
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière étape que F_∇ est une 2-forme sur $\mathcal{A}$. A présent la formule générale se prouve facilement pour tout élément de $\Omega^p(\mathcal{A}, V)$ en utilisant des combinaisons $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaires de tenseurs élémentaires. □

Définition 1.5.10 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie. Une *représentation* ([DZ11, section 8.4], [ELW99, section 1]) de $\mathcal{A}$ (ou un $\mathcal{A}$-*module*) est la donnée $(V \to M, \nabla)$ d'un fibré vectoriel $V \to M$ équipé d'une $\mathcal{A}$-connexion ∇ plate.

Définition 1.5.11 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie et soit $(V \to M, \nabla)$ un $\mathcal{A}$-module. On définit la cohomologie $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla)$ de $\mathcal{A}$ *à coefficients* dans le $\mathcal{A}$-module $(V \to M, \nabla)$ comme l'homologie du $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$-module différentiel $\mathbb{Z}$-gradué $\big(\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V), \mathrm{d}_\nabla\big)$.

Remarque 1.5.12 : D'après (1.10), $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla)$ est un $H^\bullet(\mathcal{A})$-module $\mathbb{Z}$-gradué.

Exemple 1.5.13 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. La *représentation triviale* de $\mathcal{A}$ est donnée par le fibré vectoriel $V = M \times \mathbb{R} \to M$ trivial de rang 1 et la connexion définie pour tout $u \in \Gamma(A)$ par $\nabla_u \lambda = \mathsf{a}(u) \cdot \lambda$ pour toute section $\lambda \in \Gamma(V) \cong \mathcal{C}^\infty(M)$. Dans ce cas $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla) = H^\bullet(\mathcal{A})$.

Exemple 1.5.14 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie au-dessus d'un point, c'est-à-dire une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (exemple 1.2.1), que l'on supposera de dimension finie. Soit $(V \to M, \nabla)$ un $\mathcal{A}$-module. La base M de $\mathcal{A}$ étant un point, le fibré vectoriel $V \to M$ dans la définition d'une représentation correspond à un espace vectoriel V, et la $\mathcal{A}$-connexion correspond à une application linéaire $V \to \mathfrak{g}^\vee \otimes V$. En utilisant les isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires

$$\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}^\vee \otimes V) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes V, V) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathrm{End}(V)),$$

la donnée de cette application linéaire équivaut à la donnée d'une application linéaire $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, qui est un morphisme d'algèbres de Lie d'après la formule de la courbure 1.5.6. On obtient alors que le $\mathcal{A}$-module $(V \to M, \nabla)$ correspond au $\mathfrak{g}$-module (V, ρ). La dérivée extérieure covariante de $\mathcal{A}$ est alors la différentielle de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ associée au $\mathfrak{g}$-module V (voir [CE48, section 23]) et $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla)$ est la cohomologie $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans le $\mathfrak{g}$-module V.

Exemple 1.5.15 : Soit $\mathcal{T}_M$ l'algébroïde de Lie canonique associé à une variété M (exemple 1.2.4). Une représentation de $\mathcal{T}_M$ correspond à la donnée d'un fibré vectoriel $V \to M$ et d'une connexion linéaire *plate* ∇ sur ce fibré. La dérivée extérieure covariante (1.12) est la dérivée extérieure covariante usuelle $\mathbf{d}_\nabla$ associée à ∇ (voir [GHV73, chapitre 7, section 4]) et $H^\bullet(\mathcal{T}_M; V, \nabla)$ est l'homologie du complexe $\big(\Gamma(\Lambda^\bullet T^\vee M \otimes V), \mathbf{d}_\nabla\big)$.

Exemple 1.5.16 : Soit $\mathcal{P}_M[\pi]$ l'algébroïde de Lie associé à une variété de Poisson (M, π) (exemple 1.2.5). Alors une $\mathcal{P}_M[\pi]$-connexion sur un fibré vectoriel $V \to M$ correspond à la notion de *connexion contravariante* sur la variété de Poisson (M, π) (voir [Fer00, proposition 2.1.2] et [Vai94, section 4.5]).

Exemple 1.5.17 : Soit $\mathcal{A}$ l'algébroïde de Lie d'action de l'exemple 1.2.9. On a une représentation de $\mathcal{A}$ sur le fibré trivial $M \times \mathbb{R} \to M$, avec $\nabla : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g}^\vee) \otimes \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\nabla_\xi f = \rho(\xi) \cdot f$, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$; où $\rho : \mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ est l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ sur M. Nous avons $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, M \times \mathbb{R}) \cong \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^\vee)$ et on montre que l'on a un isomorphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^k \mathfrak{g}^\vee \otimes \mathcal{C}^\infty(M) & \xrightarrow{\mathrm{d_{CE}}} & \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^\vee \otimes \mathcal{C}^\infty(M) \\
{\scriptstyle \Phi^k}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi^{k+1}} \\
\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^k \mathfrak{g}^\vee) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^\vee)
\end{array},$$

où $\mathrm{d_{CE}}$ est la différentielle de Chevalley-Eilenberg (voir [CE48, section 23]) et où Φ^k désigne l'application $\Lambda^k \mathfrak{g}^\vee \otimes \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^k \mathfrak{g}^\vee)$, $\omega \otimes f \mapsto f\omega$. Cette application induit un isomorphisme de $H^\bullet(\mathfrak{g})$-modules $\mathbb{Z}$-gradués entre la cohomologie $H^\bullet(\mathcal{A}; M \times \mathbb{R}, \nabla)$ et $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(M))$ la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{C}^\infty(M)$ donné par ρ.

1.6 Cohomologie tordue d'un algébroïde de Lie

Définition 1.6.1 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie. On notera

$$\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^{2i}(\mathcal{A}), \quad \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^{2i+1}(\mathcal{A}).$$

Les éléments de $\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A})$ sont appelés *formes différentielles paires* et ceux de $\Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ sont appelés *formes différentielles impaires*, sur $\mathcal{A}$.

Cette décomposition $\Omega^\bullet(\mathcal{A}) = \Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}) \oplus \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ des formes différentielles sur $\mathcal{A}$ confère à $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation, induite par la $\mathbb{Z}$-graduation. On étend cette

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation à $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ dès lors que l'on dispose d'une représentation $(V \to M, \nabla)$ de $\mathcal{A}$, M désignant la base de $\mathcal{A}$. $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ est alors un $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué.

Définition 1.6.2 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie de base une variété M, $(V \to M, \nabla)$ une représentation de $\mathcal{A}$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$. La *dérivée covariante extérieure* de $\mathcal{A}$ relativement à la représentation $(V \to M, \nabla)$ de $\mathcal{A}$, *tordue par la forme impaire* θ est l'opérateur défini par

$$\mathrm{d}_{\nabla,\theta}\, \omega = \mathrm{d}_\nabla \omega + \theta \wedge \omega,$$

pour tout $\omega \in \Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$. Cet opérateur est impair, c'est-à-dire envoie $\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}, V)$ sur $\Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}, V)$ et $\Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}, V)$ sur $\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}, V)$.

Remarquons que la présence de $\theta \neq 0$ implique que l'opérateur $\mathrm{d}_{\nabla,\theta}$ n'est pas une dérivation de $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$.

Lemme 1.6.3 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie de base une variété M, $(V \to M, \nabla)$ une représentation de $\mathcal{A}$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ d-fermée. Alors $\mathrm{d}_{\nabla,\theta}$ est une différentielle sur le module $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ muni de sa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation.

Preuve : Pour tout $\omega \in \Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ on a

$$\mathrm{d}^2_{\nabla,\theta}\, \omega = \mathrm{d}^2_\nabla \omega + \mathrm{d}_\nabla(\theta \wedge \omega) + \theta \wedge \mathrm{d}_\nabla \omega + \theta \wedge \theta \wedge \omega.$$

Le terme $\mathrm{d}^2_\nabla \omega$ vaut 0 puisque ∇ provient d'une représentation de $\mathcal{A}$ et donc sa courbure F_∇ est nulle par définition (voir proposition 1.5.9). Ensuite $\theta \wedge \theta = 0$, puisque θ est impaire. En effet, écrivons $\theta = \sum_{i \geq 0} \theta_{2i+1}$, avec $\theta_{2i+1} \in \Omega^{2i+1}(\mathcal{A})$. Alors $\theta_{2i+1} \wedge \theta_{2i+1} = 0$ pour tout $i \geq 0$ et $\theta_{2i+1} \wedge \theta_{2j+1} = -\theta_{2j+1} \wedge \theta_{2i+1}$ pour tout $i, j \geq 0$ tels que $i \neq j$; ce qui implique que $\theta \wedge \theta = 0$. Conservant cette notation on obtient

$$\mathrm{d}^2_{\nabla,\theta} \omega = \sum_{i \geq 0} (\mathrm{d}_\nabla \theta_{2i+1}) \wedge \omega,$$

ce qui est nul puisque $\mathrm{d}_\nabla \theta = \mathrm{d}\theta = 0$, θ étant d-fermée par hypothèse. □

Remarque 1.6.4 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et soit $\theta \in H^1(\mathcal{A})$. On peut modifier la représentation triviale de $\mathcal{A}$ (voir exemple 1.5.13) à l'aide du 1-cocycle θ, en conservant le fibré vectoriel $V = M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trivial de rang 1 mais en prenant pour connexion $\nabla_u f = \mathsf{a}(u) \cdot f + f \iota_u \theta$. Alors la différentielle $\mathrm{d}_{\nabla,\theta}$ introduite dans le lemme précédent joue un rôle dans la définition des bigébroïdes de Lie généralisés (voir [NdCCG04, définition 2.4] et [IM01, section 3.1]) d'une part, et dans l'étude des structures de Dirac de bigébroïdes de Lie généralisés (voir [NdCCG04, section 4]) d'autre part.

Définition 1.6.5 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie de base M, $(V \to M, \nabla)$ une représentation de $\mathcal{A}$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ d-fermée. On notera $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta)$ l'homologie du $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$-module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué $(\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V), \mathrm{d}_{\nabla,\theta})$ et on l'appellera cohomologie de $\mathcal{A}$ relativement à la représentation $(V \to M, \nabla)$ *tordue* par θ.

Théorème 1.6.6 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur une variété M, $(V \to M, \nabla)$ une représentation de $\mathcal{A}$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ d-fermée. Soit $\Psi \in \Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A})$. Alors on a un isomorphisme de $H^\bullet(\mathcal{A})$-modules $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués

$$H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta + \mathrm{d}\Psi) \cong H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta).$$

Preuve : L'idée de la preuve est la suivante : soit $\omega \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{\nabla, \theta+\mathrm{d}\Psi}$, ω satisfait donc l'équation « différentielle » $\mathrm{d}_{\nabla,\theta}(\omega) + \mathrm{d}\Psi \wedge \omega = 0$. Par analogie avec la théorie des équations différentielles, $\omega = \exp(-\Psi) \wedge \eta$ où η est une « constante » pour $\mathrm{d}_{\nabla,\theta}$, c'est-à-dire $\eta \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_{\nabla,\theta}$. L'isomorphisme recherché serait alors $\omega \mapsto \exp(\Psi) \wedge \omega$, pour $\omega \in \Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$. Formalisons à présent cette idée. Tout d'abord on pose $\exp(\Psi) = \sum_{k\geq 0} \frac{\Psi^{\wedge k}}{k!}$; cette série converge pour des raisons de dimension. Pour tous réels s et t on a d'après la formule du binôme de Newton que $\exp(s\Psi) \wedge \exp(t\Psi) = \exp((s+t)\Psi)$; pour $s = 1$ et $t = -1$ on obtient que $\omega \mapsto \exp(-\Psi) \wedge \omega$ est l'inverse de $\omega \mapsto \exp(\Psi) \wedge \omega$. De plus, Ψ étant paire, l'application $\exp(\Psi) \wedge \cdot$ est paire, c'est-à-dire envoie $\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}, V)$ sur $\Omega^{\mathrm{even}}(\mathcal{A}, V)$ et $\Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}, V)$ sur $\Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}, V)$; on obtient ainsi un automorphisme pair du $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$-module $\Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$. Par récurrence on a $\mathrm{d}\Psi^{\wedge k} = k\Psi^{\wedge(k-1)} \wedge \mathrm{d}\Psi$, $k \in \mathbb{N}^*$; d'où $\mathrm{d}\exp(\Psi) = \exp(\Psi) \wedge \mathrm{d}\Psi$. A présent pour tout $\omega \in \Omega^\bullet(\mathcal{A}, V)$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\nabla,\theta}\big[\exp(\Psi) \wedge \omega\big] &= \mathrm{d}_\nabla\big[\exp(\Psi) \wedge \omega\big] + \theta \wedge \exp(\Psi) \wedge \omega \\
&= \mathrm{d}\exp(\Psi) \wedge \omega + \exp(\Psi) \wedge \mathrm{d}_\nabla \omega + \exp(\Psi) \wedge \theta \wedge \omega \\
&= \exp(\Psi) \wedge \mathrm{d}\Psi \wedge \omega + \exp(\Psi) \wedge \mathrm{d}_\nabla \omega + \exp(\Psi) \wedge \theta \wedge \omega \\
&= \exp(\Psi) \wedge \mathrm{d}_{\nabla,\theta+\mathrm{d}\Psi}(\omega),
\end{aligned}$$

et par conséquent l'application $\varepsilon = \exp(\Psi) \wedge \cdot$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués en cohomologie. C'est également un isomorphisme de $H^\bullet(\mathcal{A})$-modules, c'est-à-dire que l'on a $\varepsilon([\alpha] \wedge [\omega]) = [\alpha] \wedge \varepsilon([\omega])$ pour tout $[\alpha] \in H^p(\mathcal{A})$ et $[\omega] \in H^q(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta)$ puisque

$$\varepsilon\big((\alpha + \mathrm{d}a) \wedge \omega\big) = \alpha \wedge \varepsilon(\omega) + \mathrm{d}_{\nabla,\theta}\big(\exp(\Psi) \wedge a \wedge \omega\big),$$

pour tous $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{A})$, $a \in \Omega^{p-1}(\mathcal{A})$ et $\omega \in \Omega^q(\mathcal{A}, V)$. □

Corollaire 1.6.7 : Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur une variété M, $(V \to M, \nabla)$ une représentation de $\mathcal{A}$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$ d-fermée. Alors $H^\bullet(\mathcal{A}; V, \nabla; \theta)$ ne dépend que de la classe de cohomologie $[\theta] \in H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$.

Exemple 1.6.8 : Soit M une variété. Appliquons le corollaire précédent à l'algébroïde de Lie $\mathcal{T}_M$ (exemple 1.2.4). Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel $V \to M$ et $\theta \in \Omega^{\mathrm{odd}}(M) = \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathcal{T}_M)$. Alors le $\mathbf{H}^\bullet(M)$-module $H^\bullet(\mathcal{T}_M; V, \nabla; \theta)$ ne dépend que de la classe de cohomologie $[\theta] \in \mathbf{H}^{\mathrm{odd}}(M) = H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{T}_M)$. Ce résultat a été obtenu pour la première fois dans [MW11, section 1].

1.7 Algèbre de Schouten-Nijenhuis

Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Nous rappelons brièvement la structure d'algèbre de Gerstenhaber sur $\Gamma(\Lambda^\bullet A)$ ([Xu99, section 1] et [KS95, section 1]).

Définition 1.7.1 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Le *crochet de Schouten-Nijenhuis* $[\cdot,\cdot] : \Gamma(\Lambda^p A) \times \Gamma(\Lambda^q A) \to \Gamma(\Lambda^{p+q-1} A)$ sur $\mathcal{A}$ est défini par

$$[u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_q] = \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} (-1)^{i+j} [u_i, v_j] \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u_i} \wedge \cdots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_q,$$

pour tous $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in \Gamma(A)$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, le crochet de Schouten-Nijenhuis est défini par $[f, u_1 \wedge \cdots \wedge u_p] = -\iota_{\mathrm{d}f}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p)$, pour tout $u_1, \ldots, u_p \in \Gamma(A)$.

Le crochet de Schouten-Nijenhuis ([Mar08, section 5.4], [Car09, section 2.6]) sera utilisé au chapitre 2 dans la définition des bigébroïdes de Lie.

Proposition 1.7.2 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie. Équipée du crochet de Schouten-Nijenhuis, l'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée commutative $(\Gamma(\Lambda^\bullet A), \wedge)$ est une algèbre de Gerstenhaber, voir [Mar08, proposition 5.4.9 et remarque 5.4.10]. Cette algèbre est appelée l'*algèbre de Schouten-Nijenhuis* de $\mathcal{A}$.

Exemple 1.7.3 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, donc un algébroïde de Lie au-dessus d'un point (voir l'exemple 1.2.1). En étendant le crochet de $\mathfrak{g}$ à $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$, on obtient une algèbre de Gerstenhaber ([KS95, exemple 1.1]). Ce crochet de Schouten-Nijenhuis est appelé crochet de Schouten *algébrique*.

Exemple 1.7.4 : Soit M une variété et considérons l'algébroïde de Lie canonique $\mathcal{T}_M$ de l'exemple 1.2.4. Alors le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathcal{T}_M$ est l'extension à $\Gamma(\Lambda^\bullet TM)$ du crochet de Lie des champs de vecteurs sur M, équipant ainsi $\Gamma(\Lambda^\bullet TM)$ d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber. Ce crochet est appelé *crochet de Schouten-Nijenhuis* des multivecteurs [LGPV13, section 3.3].

Exemple 1.7.5 : Soit (M, π) une variété de Poisson et considérons l'algébroïde de Lie $\mathcal{P}_M[\pi]$ de l'exemple 1.2.5. Alors le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathcal{P}_M[\pi]$ est l'extension à $\Omega^\bullet(M)$ du crochet de l'algébroïde de Lie $\mathcal{P}_M[\pi]$ (donné dans 1.2.5), équipant ainsi $\Omega^\bullet(M)$ d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber. Ce crochet est appelé *crochet de Koszul* (voir [KS95, exemple 1.3]).

Chapitre 2

Algébroïdes de Courant

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition des algébroïdes de Leibniz et de Courant dans le formalisme de la géométrie différentielle *non graduée*. Pour un point de vue utilisant les *dg-variétés symplectiques*, voir [GKP13] concernant les algébroïdes de Leibniz, et [Roy02a] concernant les algébroïdes de Courant. Nous discutons également de la notion de structure de Dirac et de morphismes entre algébroïdes de Courant. Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude de la cohomologie naïve d'un algébroïde de Courant, laquelle est isomorphe à la cohomologie d'un algébroïde de Lie canoniquement associé à l'algébroïde de Courant.

2.1 Algébroïdes de Leibniz

Définition 2.1.1 : Une *algèbre de Leibniz à gauche* $\mathfrak{l}$ ([Lod93, section 1]) est un espace vectoriel équipé d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ appelée *crochet* qui satisfait l'identité

$$\big[u, [v, w]\big] = \big[[u, v], w\big] + \big[v, [u, w]\big], \tag{2.1}$$

pour tous $u, v, w \in \mathfrak{l}$.

Exemple 2.1.2 : Les algèbres de Lie sont des algèbres de Leibniz, qui ont pour particularité d'avoir un crochet antisymétrique.

Exemple 2.1.3 : Soit $\mathfrak{l}$ un espace vectoriel de dimension 2 et notons (u, v) une base de $\mathfrak{l}$. On définit un crochet $[\cdot,\cdot]$ sur $\mathfrak{l}$ par

$$[u, u] = v, \quad [u, v] = v, \quad [v, u] = 0, \quad [v, v] = 0,$$

puis on l'étend par linéarité. Alors $(\mathfrak{l}, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Leibniz à gauche.

Exemple 2.1.4 : Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielle, c'est-à-dire $\mathrm{d} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une dérivation et $\mathrm{d}^2 = 0$. Alors $\mathfrak{g}$ munie du crochet défini par

$$[\xi, \eta] = [\mathrm{d}\xi, \eta]_{\mathfrak{g}},$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, est une algèbre de Leibniz à gauche ([Lod93, exemple 2.2]). Cet exemple peut être considéré comme une version non graduée de *crochet dérivé* [KS96a, proposition 2.1].

Exemple 2.1.5 : Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie et soit V un $\mathfrak{g}$-module. Soit $\mu : V \to \mathfrak{g}$ une application linéaire $\mathfrak{g}$-équivariante, c'est-à-dire satisfaisant

$$\mu(\xi \cdot v) = [\mu(v), \xi]_{\mathfrak{g}},$$

pour tous $\xi \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$. On définit sur V un crochet $[\cdot,\cdot]$ par

$$[v, w] = \mu(w) \cdot v$$

pour tous $v, w \in V$. Alors $(V, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Leibniz à gauche ([Lod93, exemple 2.1]).

Définition 2.1.6 : Soit $(\mathfrak{l}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{l}})$ et $(\mathfrak{m}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{m}})$ deux algèbres de Leibniz. Un *morphisme d'algèbres de Leibniz* ([Lod93, section 1]) entre $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$ est une application linéaire $\Phi : \mathfrak{l} \to \mathfrak{m}$ telle que pour tous $u, v \in \mathfrak{l}$ on ait

$$\Phi\Big([u,v]_{\mathfrak{l}}\Big) = \Big[\Phi(u), \Phi(v)\Big]_{\mathfrak{m}}.$$

Exemple 2.1.7 : Un morphisme d'algèbres de Lie est un morphisme d'algèbres de Leibniz. On a un foncteur oubli **Lie** $\to$ **Leibniz** de la catégorie des algèbres de Lie vers la catégorie des algèbres de Leibniz.

Exemple 2.1.8 : Dans l'exemple 2.1.5, l'application linéaire $\mu : V \to \mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Leibniz ([Lod93, exemple 2.1]).

Définition 2.1.9 : Un *algébroïde de Leibniz* $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ (à gauche) est la donnée d'un fibré vectoriel $A \to M$, d'une ancre a sur ce fibré, ainsi que d'une structure d'algèbre de Leibniz (à droite) sur son module de sections globales $\Gamma(A)$ dont le crochet satisfait la *règle de Leibniz* (à droite)

$$[u, fv] = f[u,v] + (\mathsf{a}(u) \cdot f)v, \tag{2.2}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposition 2.1.10 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Leibniz. Alors (voir [KS10, lemme 2.5]) l'ancre a induit un morphisme d'algèbres de Leibniz au niveau des modules de sections, c'est-à-dire

$$\mathsf{a}\big([u,v]\big) = \big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big],$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$, où à gauche on a le crochet de l'algébroïde de Leibniz et à droite le crochet de Lie des champs des vecteurs.

Remarque 2.1.11 : Puisque l'on suppose dans tout le texte que les morphismes de fibrés vectoriels sont par défaut de rang constant (voir les conventions), tous les algébroïdes de Leibniz que nous considérons sont plus exactement des algébroïdes de Leibniz *réguliers*.

Exemple 2.1.12 : Un algébroïde de Leibniz au-dessus d'un point est une algèbre de Leibniz.

Exemple 2.1.13 : Un fibré en algèbres de Leibniz est un algébroïde de Leibniz, d'ancre nulle.

Exemple 2.1.14 : Soit M une variété et k un entier positif. Le fibré vectoriel $TM \oplus \Lambda^k T^\vee M \to M$ est un algébroïde de Leibniz d'ancre la projection sur le premier facteur pour le crochet défini par

$$[X \oplus \omega, Y \oplus \eta] = [X, Y] \oplus \mathscr{L}_X \eta - \iota_Y \mathbf{d}\omega,$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ et formes différentielles $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ (voir [BS11, section 2] et [Bar12, section 2.2]).

Exemple 2.1.15 : D'après [IdLMP99, théorème 3.7] à toute variété de Nambu-Poisson [Tak94, section 2] est associé canoniquement un algébroïde de Leibniz.

Définition 2.1.16 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Leibniz au-dessus de la *même* base. Un *morphisme* entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, couvrant l'identité, est la donnée d'un morphisme $\Phi : A \to B$ entre les fibrés vectoriels $A \to M$ et $B \to M$ couvrant l'identité et qui commute aux ancres et aux crochets au sens où

$$\mathsf{a}_A = \mathsf{a}_B \circ \Phi, \tag{2.3}$$

$$\Phi\Big([u, v]_A\Big) = \Big[\Phi(u), \Phi(v)\Big]_B, \tag{2.4}$$

pour toutes sections $u, v \in \Gamma(A)$. Dans le cas où Φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels (respectivement automorphisme) on dira que $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *isomorphisme* d'algébroïdes de Leibniz (respectivement *automorphisme*) puisque Φ^{-1} est un morphisme d'algébroïdes de Leibniz.

Définition 2.1.17 : Soit M une variété. On notera $\textsf{\textbf{AlgdLeibniz}}(M)$ la catégorie dont les objets sont les algébroïdes de Leibniz réguliers de base M et les morphismes sont les morphismes entre algébroïdes de Leibniz réguliers de base M et couvrant l'identité.

Proposition 2.1.18 : On a un foncteur oubli $\textsf{\textbf{AlgdLie}}(M) \to \textsf{\textbf{AlgdLeibniz}}(M)$.

2.2 Algébroïdes de Courant

Informellement, un algébroïde de Courant est un algébroïde de Leibniz pour lequel le défaut d'antisymétrie du crochet est contrôlé par un produit scalaire.

Définition 2.2.1 : Soit $E \to M$ un fibré vectoriel réel. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une section de la seconde puissance symétrique de $E^\vee \to M$. Ceci correspond à la donnée de formes bilinéaires symétriques $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ sur chaque fibre E_x, $x \in M$, de $E \to M$, telle que l'application $x \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_x$ soit lisse ; ces applications s'assemblent en une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui a son tour induit une application $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénérée, on dira que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un *produit scalaire* sur le fibré vectoriel $E \to M$ (voir [GHV72, paragraphe 2.17, section 4, chapitre 2], ou [Hus94, définition 9.2, chapitre 3] pour une définition équivalente).

Étant donné un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur un fibré vectoriel $E \to M$, on notera par un bémol en exposant l'isomorphisme $\Upsilon : E \to E^\vee$ induit par le produit scalaire, et par un dièse en exposant l'isomorphisme inverse $\Upsilon^{-1} : E^\vee \to E$. On notera $\langle\cdot|\cdot\rangle : E^\vee \times E \to \mathcal{C}^\infty(M)$ la dualité entre $E^\vee \to M$ et $E \to M$ définie par l'évaluation $\langle\varphi|u\rangle = \varphi(u)$. Remarquons que $\langle u, v\rangle = \langle u^\flat|v\rangle$ d'une part, et $\langle\varphi|u\rangle = \langle\varphi^\sharp, u\rangle$ d'autre part, pour tous $u, v \in \Gamma(E)$ et $\varphi \in \Gamma(E^\vee)$. Notons également que du fait que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ne soit pas supposé défini positif, nous ne disposons pas de décomposition orthogonale associée à un sous-fibré vectoriel de $E \to M$.

Définition 2.2.2 : Un *algébroïde de Courant* (à gauche) $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est la donnée d'un fibré vectoriel $E \to M$, d'une ancre a sur ce fibré, d'un crochet $[\cdot,\cdot]$ $\mathbb{R}$-bilinéaire sur ses $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules $\Gamma(E)$ de sections, et d'un produit scalaire sur $E \to M$, satisfaisant les trois relations

$$\mathsf{a}(u)\cdot\langle v, w\rangle = \big\langle [u,v], w\big\rangle + \big\langle v, [u,w]\big\rangle, \tag{2.5}$$
$$\big[u,[v,w]\big] = \big[[u,v],w\big] + \big[v,[u,w]\big], \tag{2.6}$$
$$[u,v] + [v,u] = \mathsf{D}\langle u, v\rangle, \tag{2.7}$$

pour tous $u, v, w \in \Gamma(E)$, où $\mathsf{D} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \Gamma(E)$ est la dérivation $\Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}^\vee \circ \mathbf{d}$ et $\mathsf{a}^\vee : T^\vee M \to E^\vee$ l'application duale de l'ancre définie par

$$\big\langle \mathsf{a}^\vee(\alpha)\big|u\big\rangle = \big\langle \alpha\big|\mathsf{a}(u)\big\rangle,$$

pour tous $\alpha \in \Gamma(T^\vee M)$ et $u \in \Gamma(E)$.

Définition 2.2.3 : Un algébroïde de Courant est *transitif* lorsque son ancre est surjective.

Les algébroïdes de Courant transitifs ont été étudiés dans [Vai05], [Bre07] et [Š00].

Définition 2.2.4 : Un algébroïde de Courant est *régulier* lorsque son ancre est de rang constant.

Les algébroïdes de Courant réguliers ont été étudiés dans [CSX13].

Remarque 2.2.5 : Puisque l'on suppose dans tout le texte que les morphismes de fibrés vectoriels sont par défaut de rang constant (voir les conventions), tous les algébroïdes de Courant que nous considérons sont réguliers.

Définition 2.2.6 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ un algébroïde de Courant. On notera $-\mathcal{E}$ l'algébroïde de Courant *renversé* $(E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, -\langle\cdot,\cdot\rangle_E)$

Proposition 2.2.7 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toutes sections $u, v \in \Gamma(E)$ on a les propriétés suivantes :

$$\langle \mathsf{D}f, u\rangle = \mathsf{a}(u)\cdot f, \tag{2.8}$$
$$[u, fv] = (\mathsf{a}(u)\cdot f)v + f[u,v], \tag{2.9}$$
$$[fu, v] = \langle u,v\rangle \mathsf{D}f - (\mathsf{a}(v)\cdot f)u + f[u,v], \tag{2.10}$$
$$[\mathsf{D}f, u] = 0, \tag{2.11}$$
$$[u, \mathsf{D}f] = \mathsf{D}\langle \mathsf{D}f, u\rangle = \mathsf{D}\left(\mathsf{a}(u)\cdot f\right), \tag{2.12}$$
$$\mathsf{a}\big([u,v]\big) = \big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big], \tag{2.13}$$
$$\mathsf{a}\circ\mathsf{D} = 0, \tag{2.14}$$
$$\Gamma\left((\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp}\right) \text{ est localement engendré par } \operatorname{Im}\mathsf{D} \text{ en tant que } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-module}, \tag{2.15}$$
$$(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp} \subset \operatorname{Ker}\mathsf{a} \tag{2.16}$$
$$\mathsf{a}\circ\Upsilon^{-1}\circ\mathsf{a}^{\vee} = 0. \tag{2.17}$$

Preuve : Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ et $u,v,w\in\Gamma(E)$ quelconques.

(2.8) On a successivement

$$\langle \mathsf{D}f, u\rangle = \big\langle \mathsf{D}f^\flat \big| u\big\rangle = \big\langle \mathsf{a}^\vee(\mathrm{d}f)\big| u\big\rangle = \big\langle \mathrm{d}f \big| \mathsf{a}(u)\big\rangle = \mathrm{d}f(\mathsf{a}(u)) = \mathsf{a}(u)\cdot f.$$

(2.9) D'après (2.5) on a

$$\mathsf{a}(u)\cdot\langle fv, w\rangle = \big\langle [u,fv], w\big\rangle + f\big\langle v, [u,w]\big\rangle,$$

et puisque les champs de vecteurs sont des dérivations de l'algèbre des fonctions, on a

$$\begin{aligned}\mathsf{a}(u)\cdot\big(f\langle v,w\rangle\big) &= (\mathsf{a}(u)\cdot f)\langle v,w\rangle + f\mathsf{a}(u)\cdot\langle v,w\rangle\\ &= \big\langle (\mathsf{a}(u)\cdot f)v + f[u,v], w\big\rangle + f\big\langle v,[u,w]\big\rangle.\end{aligned}$$

En combinant les deux relations on obtient le résultat escompté.

(2.10) En utilisant (2.9) et (2.7) plusieurs fois on obtient

$$\begin{aligned}[fu,v] &= \mathsf{D}\langle fu, v\rangle - [v, fu]\\ &= \mathsf{D}\left(f\langle u,v\rangle\right) - (\mathsf{a}(v)\cdot f)u - f[u,v]\\ &= \langle u,v\rangle\mathsf{D}f + f\mathsf{D}\langle u,v\rangle - (\mathsf{a}(v)\cdot f)u - f[v,u]\\ &= \langle u,v\rangle\mathsf{D}f + f[u,v] - (\mathsf{a}(v)\cdot f)u.\end{aligned}$$

(2.11) Posons $\mathsf{Lod}(u,v,w) = \big[u,[v,w]\big] - \big[[u,v],w\big] - \big[v,[u,w]\big]$. On a

$$\mathsf{Lod}(u,v,w) + \mathsf{Lod}(v,u,w) = -\big[[u,v]+[v,u], w\big] = -\big[\mathsf{D}\langle u,v\rangle, w\big],$$

et on sait que le membre de gauche est nul d'après l'identité (2.6). Maintenant pour toute fonction f on peut écrire :

$$f = \left\langle \varphi, \frac{f}{\langle\varphi,\varphi\rangle}\varphi\right\rangle, \tag{2.18}$$

avec φ une section non nulle de $E\to M$. Donc on obtient l'égalité pour toute fonction lisse.

(2.12) La relation (2.7) donne $[u, \mathsf{D}f] + [\mathsf{D}f, u] = \mathsf{D}\langle \mathsf{D}f, u\rangle$; on obtient le résultat par (2.11).

(2.13) On a successivement

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(u) \cdot \big(\mathsf{a}(v) \cdot f\big) &= \mathsf{a}(u) \cdot \langle \mathsf{D}f, v\rangle \\ &= \big\langle [u, \mathsf{D}f], v\big\rangle + \big\langle \mathsf{D}f, [u, v]\big\rangle \\ &= \big\langle [u, \mathsf{D}f], v\big\rangle + \mathsf{a}\big([u, v]\big) \cdot f \\ &= \Big\langle \mathsf{D}\big(\mathsf{a}(u) \cdot f\big), v\Big\rangle + \mathsf{a}\big([u, v]\big) \cdot f \\ &= \mathsf{a}(v) \cdot \big(\mathsf{a}(u) \cdot f\big) + \mathsf{a}\big([u, v]\big) \cdot f. \end{aligned}$$

(2.14) En utilisant (2.10) on a

$$\mathsf{a}\big([fu, v]\big) = f\mathsf{a}\big([u, v]\big) - (\mathsf{a}(v) \cdot f)\mathsf{a}(u) + \langle u, v\rangle \mathsf{a}(\mathsf{D}f),$$

puis en appliquant (2.13) des deux côtés on obtient

$$\big[f\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big] = f\big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big] - (\mathsf{a}(v) \cdot f)\mathsf{a}(u) + \langle u, v\rangle \mathsf{a}(\mathsf{D}f).$$

Or le membre de gauche est égal à $f\big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big] - (\mathsf{a}(v) \cdot f)\mathsf{a}(u)$, ce qui permet d'obtenir le résultat.

(2.15) D'après [Gre75, chapitre 2, section 5, proposition 3] on a

$$(\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp \cong \Upsilon^{-1} \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} \mathsf{a}) \cong \Upsilon^{-1}(\operatorname{Im} \mathsf{a}^\vee),$$

et $\Gamma(T^\vee M)$ est engendré par $\operatorname{Im} \mathbf{d}$ en tant que $\mathcal{C}^\infty(M)$-module (puisque toute 1-forme différentielle s'écrit localement comme une combinaison $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire de $\mathbf{d}x^1, \dots, \mathbf{d}x^n$, avec $(x^1, \dots, x^n)$ des coordonnées locales sur M).

(2.16) D'après la propriété (2.15) puis (2.8) on obtient que le fibré vectoriel $(\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp \to M$ est un sous-fibré vectoriel de $\operatorname{Ker} \mathsf{a} \to M$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} \mathsf{a} \to M$ est *coisotrope* pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(2.17) Pour tout $\alpha \in \Gamma(E^\vee)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a

$$\big\langle \Upsilon^{-1}\mathsf{a}^\vee(\alpha), \mathsf{D}f\big\rangle = \big\langle \alpha \,\big|\, \mathsf{a}(\mathsf{D}f)\big\rangle = 0,$$

donc $\Upsilon^{-1}\mathsf{a}^\vee(\alpha) \in (\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp$. Or d'après (2.8) et (2.14) on a $(\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp \subset \operatorname{Ker} \mathsf{a}$. Par conséquent $\mathsf{a} \circ \Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}^\vee = 0$. □

La preuve de la relation (2.13) a été donnée dans [Uch02] pour la première fois. On trouvera une partie de la preuve de la proposition précédente dans [Vai05, proposition 1.2], voir également [KS13] pour un historique de la notion d'algébroïde de Courant et de la preuve de ces propriétés.

Remarque 2.2.8 : Un algébroïde de Courant est un algébroïde de Leibniz. En effet, la relation (2.6) signifie que $\Gamma(E)$ est une algèbre de Leibniz, puis d'après la proposition précédente, la règle de Leibniz (à droite) est satisfaite (relation (2.9)).

Remarque 2.2.9 : Les propriétés (2.9) et (2.10) signifient que le crochet d'un algébroïde de Courant n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en général, mais satisfait à la place une règle de Leibniz à droite (2.9) et à gauche (2.10), *différentes*. Ces deux règles auraient été interverties si on avait pris un algébroïde de Leibniz à droite dans la définition d'algébroïde de Courant.

Remarque 2.2.10 : Dans la définition d'algébroïde de Courant énoncée ci-dessus, le produit scalaire est non dégénéré, en particulier il ne peut pas être identiquement nul. Par conséquent, dans ce cadre, on ne peut pas considérer les algébroïdes de Lie comme un cas particulier des algébroïdes de Courant. Quand bien même on autoriserait dans la définition un produit scalaire identiquement nul, la relation (2.8) impliquerait que l'ancre soit identiquement nulle, or il existe des algébroïdes de Lie d'ancre non identiquement nulle, par exemple l'algébroïde canonique $\mathcal{T}_M$ sur une variété $M \neq \varnothing$ (voir exemple 1.2.4).

Remarque 2.2.11 : Il est possible d'adapter l'exemple 2.1.4 aux algébroïdes de Courant. Il s'agit alors de présenter le crochet d'un algébroïde de Courant comme *crochet dérivé*, voir [AX07, section 1] pour une exposition utilisant la géométrie différentielle et [Roy02a, théorème 4.5] pour une exposition utilisant la géométrie différentielle graduée. Dans le cadre de la géométrie différentielle usuelle, la différentielle de l'exemple 2.1.4 est remplacée par un opérateur de Dirac générateur D (voir [AX07, section 1.2]) et dans le cadre de la géométrie différentielle graduée, elle est remplacée par la différentielle $\{Q, \cdot\}$ où Q un champ de vecteur cohomologique et $\{\cdot, \cdot\}$ un crochet de Poisson gradué (voir [Roy02a]).

On peut également définir les algébroïdes de Courant avec un crochet antisymétrique ([RW98, définition 3.2], [Vai05, définition 1.6]) ; nous montrerons plus loin l'équivalence des deux définitions.

Définition 2.2.12 : Un *algébroïde de Courant* $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\![\cdot,\cdot]\!], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est la donnée d'un fibré vectoriel $E \to M$, d'une ancre a sur ce fibré, d'un crochet $\mathbb{R}$-bilinéaire $[\![\cdot,\cdot]\!]$ antisymétrique sur ses $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules $\Gamma(E)$ de sections locales, et d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfaisant les deux relations

$$\mathsf{Jac}(u, v, w) = -\frac{2}{3}\mathsf{D}\big[\,\mathsf{Nij}(u, v, w)\big], \tag{2.19}$$

$$\mathsf{a}(u) \cdot \langle v, w\rangle = \left\langle [\![u, v]\!] + \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle u, v\rangle, w \right\rangle + \left\langle v, [\![u, w]\!] + \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle u, w\rangle \right\rangle, \tag{2.20}$$

où les quantités Jac (appelée *Jacobiateur*) et Nij (appelée *fonction de Nijenhuis*) sont définies par

$$\mathsf{Jac}(u, v, w) = [\![[\![u, v]\!], w]\!] + [\![[\![w, u]\!], v]\!] + [\![[\![v, w]\!], u]\!], \tag{2.21}$$

$$\mathsf{Nij}(u, v, w) = \big\langle [\![u, v]\!], w\big\rangle + \big\langle [\![w, u]\!], v\big\rangle + \big\langle [\![v, w]\!], u\big\rangle, \tag{2.22}$$

pour tous $u, v, w \in \Gamma(E)$, et où $\mathsf{D} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \Gamma(E)$ est la dérivation $\Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}^\vee \circ \mathbf{d}$ et $\mathsf{a}^\vee : T^\vee M \to E^\vee$ l'application duale de l'ancre définie par

$$\big\langle \mathsf{a}^\vee(\alpha) \big| u\big\rangle = \big\langle \alpha \big| \mathsf{a}(u)\big\rangle,$$

pour tous $\alpha \in \Gamma(T^\vee M)$ et $u \in \Gamma(E)$.

Remarque 2.2.13 : Dans la définition 2.2.2, le crochet $[\cdot,\cdot]$ est dit de *type Dorfman*, alors que dans la définition 2.2.12, le crochet $[\![\cdot,\cdot]\!]$ est dit de *type Courant*, pour des raisons historiques.

Remarque 2.2.14 : La relation (2.19) est appelée *identité de Jacobi homotopique*.

Proposition 2.2.15 : Les deux définitions 2.2.2 et 2.2.12 sont équivalentes.

Preuve : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant, au sens de la définition 2.2.2. On pose

$$[\![u,v]\!] = [u,v] - \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle u,v\rangle, \tag{2.23}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(E)$. Ce crochet est bien antisymétrique d'après (2.7). On en déduit directement (2.20) à partir de (2.5) ; reste à montrer (2.19). Posons $\mathsf{Lod}(u,v,w) = [u,[v,w]] - [[u,v],w] - [v,[u,w]]$. On a alors que

$$\begin{aligned}\mathsf{Lod}(u,v,w) = \mathsf{Jac}(u,v,w) &+ \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle u,[\![v,w]\!]\rangle + \frac{1}{2}[\![u,\mathsf{D}\langle v,w\rangle]\!] + \frac{1}{4}\mathsf{D}\left(\mathsf{a}(u)\cdot\langle v,w\rangle\right)\\ &- \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle w,[\![u,v]\!]\rangle - \frac{1}{2}[\![w,\mathsf{D}\langle u,v\rangle]\!] - \frac{1}{4}\mathsf{D}\left(\mathsf{a}(w)\cdot\langle u,v\rangle\right)\\ &- \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle v,[\![u,w]\!]\rangle + \frac{1}{2}[\![v,\mathsf{D}\langle u,w\rangle]\!] - \frac{1}{4}\mathsf{D}\left(\mathsf{a}(v)\cdot\langle u,w\rangle\right),\end{aligned} \tag{2.24}$$

pour tous $u, v, w \in \Gamma(E)$. Remarquons alors que la propriété (2.12) pour le crochet $[\cdot,\cdot]$ implique pour le nouveau crochet $[\![\cdot,\cdot]\!]$ que

$$[\![u,\mathsf{D}f]\!] = \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle \mathsf{D}f,u\rangle = \frac{1}{2}\mathsf{D}\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big),$$

pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $u \in \Gamma(E)$. Par conséquent, en sommant l'égalité (2.24) tout en effectuant des permutations circulaires on obtient

$$\begin{aligned}&\mathsf{Lod}(u,v,w) + \mathsf{Lod}(w,u,v) + \mathsf{Lod}(v,w,u)\\ &\qquad = 3\,\mathsf{Jac}(u,v,w) + \frac{1}{2}\mathsf{D}\big\langle u,[\![v,w]\!]\big\rangle + \frac{1}{2}\mathsf{D}\big\langle v,[\![w,u]\!]\big\rangle + \frac{1}{2}\mathsf{D}\big\langle w,[\![u,v]\!]\big\rangle,\end{aligned} \tag{2.25}$$

or $\mathsf{Lod} = 0$ d'après la relation (2.6) de la définition 2.2.2, d'où finalement

$$\mathsf{Jac}(u,v,w) = -\frac{2}{3}\mathsf{D}\big[\,\mathsf{Nij}(u,v,w)\big],$$

pour tous $u, v, w \in \Gamma(E)$.

Réciproquement, soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\![\cdot,\cdot]\!], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant, au sens de la définition 2.2.12. On pose

$$[u,v] = [\![u,v]\!] + \frac{1}{2}\mathsf{D}\langle u,v\rangle,$$

pour tous $u, v \in \Gamma(E)$. Alors on obtient directement la relation (2.5) à partir de (2.20). Puis d'après (2.25) et (2.19) on obtient la relation (2.6). Enfin la relation (2.7) découle directement de la définition de $[\cdot,\cdot]$. □

Dans la proposition ci-dessous, on reformule les relations qui avaient été établies dans la proposition 2.2.7, mais cette fois-ci dans le cadre de la définition 2.2.12.

Proposition 2.2.16 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\![\cdot,\cdot]\!], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et toutes sections $u, v \in \Gamma(E)$ on a les propriétés suivantes :

$$\langle \mathsf{D}f, u\rangle = \mathsf{a}(u)\cdot f, \tag{2.26}$$

$$[\![u, fv]\!] = (\mathsf{a}(u)\cdot f)v + f[\![u,v]\!] - \frac{1}{2}\langle u,v\rangle \mathsf{D}f, \tag{2.27}$$

$$[\![fu, v]\!] = \frac{1}{2}\langle u,v\rangle \mathsf{D}f - (\mathsf{a}(v)\cdot f)u + f[\![u,v]\!], \tag{2.28}$$

$$[\![\mathsf{D}f, u]\!] = -\mathsf{D}\langle \mathsf{D}f, u\rangle = -\mathsf{D}\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big), \tag{2.29}$$

$$[\![u, \mathsf{D}f]\!] = \mathsf{D}\langle \mathsf{D}f, u\rangle = \mathsf{D}\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big), \tag{2.30}$$

$$\mathsf{a}\big([\![u,v]\!]\big) = \big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big] \tag{2.31}$$

$$\mathsf{a}\circ \mathsf{D} = 0, \tag{2.32}$$

$$\Gamma\left((\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp\right) \text{ est localement engendré par } \operatorname{Im}\mathsf{D} \text{ en tant que } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-module,} \tag{2.33}$$

$$\mathsf{a}\circ\Upsilon^{-1}\circ\mathsf{a}^\vee = 0. \tag{2.34}$$

Les lemmes suivants signifient que le crochet d'un algébroïde de Courant est une opération *locale*.

Lemme 2.2.17 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Leibniz et soit U un ouvert de M. Soit $v \in \Gamma(E)$ telle que $v|_U = 0$. Alors $[u,v]|_U = 0$ pour toute section $u \in \Gamma(E)$.

Preuve : Soit $x \in U$. Il existe une fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ (appelée fonction plateau, voir [Lee13, proposition 2.25]) dont le support est contenu dans U et telle que $f(x) = 1$. La section fv de $E \to M$ s'annule en tout point puisque v s'annule sur U tandis que f s'annule en dehors de U. D'après (2.9) on a

$$0 = [u, fv] = \big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big)v + f[u,v],$$

d'où l'on déduit

$$[u,v]_x = -\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big)v_x = 0,$$

puisque par hypothèse $v_x = 0$. □

Lemme 2.2.18 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit U un ouvert de M. Soit $u \in \Gamma(E)$ telle que $u|_U = 0$. Alors $[u,v]|_U = 0$ pour toute section $v \in \Gamma(E)$.

Preuve : On procède comme dans la preuve de 2.2.17. Soit $x \in U$. Il existe une fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ (appelée fonction plateau, voir [Lee13, proposition 2.25]) dont le support est contenu dans U et telle que $f(x) = 1$. La section fu de $E \to M$ s'annule en tout point puisque u s'annule sur U tandis que f s'annule en dehors de U. D'après (2.10) on a

$$0 = [fu, v] = \langle u,v\rangle \mathsf{D}f - \big(\mathsf{a}(v)\cdot f\big)u + f[u,v],$$

d'où l'on déduit

$$[u,v]_x = \big(\mathsf{a}(v)\cdot f\big)u_x - \langle u_x, v_x\rangle \mathsf{D} f_x = 0,$$

puisque par hypothèse $u_x = 0$. □

Les deux lemmes précédents permettent d'obtenir facilement la proposition suivante.

Proposition 2.2.19 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit U un ouvert de M. Soit $u, u' \in \Gamma(E)$ telles que $u|_U = u'|_U$. Alors $[u,v]|_U = [u',v]|_U$ et $[v,u]|_U = [v,u']|_U$ pour toute section $v \in \Gamma(E)$.

2.3 Exemples d'algébroïdes de Courant

Exemple 2.3.1 : Un algébroïde de Courant de base un point s'identifie à une algèbre de Lie quadratique.

Exemple 2.3.2 : Un fibré $E \to M$ en algèbres de Lie quadratiques est un algébroïde de Courant, dont l'ancre est nulle. En effet, le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ dont est équipé une fibre type $\mathfrak{g}$ induit un crochet de Lie au niveau des sections défini par $[u,v]_x = [u_x, v_x]_{\mathfrak{g}}$, pour tous $u, v \in \Gamma(E)$ et $x \in M$. Ce crochet est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire puisque

$$[fu, v]_x = \big[f(x)u_x, v_x\big]_{\mathfrak{g}} = f(x)[u_x, v_x]_{\mathfrak{g}} = \big(f[u,v]\big)_x,$$

pour $u, v \in \Gamma(A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $x \in M$. Le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ dont est muni une fibre type $\mathfrak{g}$ induit un produit scalaire au niveau des sections défini par $\langle u, v\rangle_x = \langle u_x, v_x\rangle_{\mathfrak{g}}$, pour tous $u, v \in \Gamma(E)$ et $x \in M$. L'ancre est nulle d'après (2.2) et $\mathsf{D} = 0$. Enfin la relation (2.5) est vérifiée par définition d'une algèbre de Lie quadratique, voir (1.2.12) ; (2.7) est également satisfaite. On obtient alors une structure d'algébroïde de Courant, d'ancre nulle.

Le lemme suivant établit la réciproque de l'exemple précédent.

Lemme 2.3.3 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant d'ancre a nulle. Alors $\mathcal{E}$ est un fibré en algèbres de Lie quadratiques.

Preuve : L'ancre étant nulle, $\mathsf{D} = 0$ et $[\cdot,\cdot]$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire d'après (2.2) et (1.2). De manière similaire à la preuve du lemme 1.2.3, on peut équiper chaque fibre E_x d'une structure d'algèbre de Lie, qui est quadratique d'après (2.5). □

Remarque 2.3.4 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. D'après (2.13), $\operatorname{Ker}\mathsf{a} \to M$ est un sous-fibré vectoriel de $A \to M$, stable pour $[\cdot,\cdot]$. Par conséquent, l'ancre, le crochet et le produit scalaire sur $A \to M$ restreints à $\operatorname{Ker}\mathsf{a} \to M$ confèrent à ce fibré vectoriel une structure de fibré en algèbres de Lie quadratiques, qui d'après l'exemple 2.3.2 est une structure d'algébroïde de Courant.

Exemple 2.3.5 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique agissant sur une variété M à travers le morphisme d'algèbres de Lie $\xi \in \mathfrak{g} \mapsto X_\xi \in \Gamma(TM)$. Supposons que les algèbres stabilisatrices de l'action, définies par $\{\xi \in \mathfrak{g} : \mathscr{L}_{X_\xi} Y = 0,$ pour tout $Y \in$

$\Gamma(TM)\}$, soient coisotropes (relativement au produit scalaire sur $\mathfrak{g}$). Alors le fibré vectoriel $M \times \mathfrak{g} \to M$ peut être équipé d'une structure d'algébroïde de Courant au-dessus de M, voir [LBM09, exemple 2.14 et section 4].

2.3.1 Algébroïdes de Courant exacts

Définition 2.3.6 : Un algébroïde de Courant $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est dit *exact* (voir [Š00]) si il est transitif (voir définition 2.2.3) et si de plus le fibré vectoriel $E \to M$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T^\vee M \xrightarrow{\mathsf{a}^\vee} E^\vee \cong E \xrightarrow{\mathsf{a}} TM \longrightarrow 0, \tag{2.35}$$

où l'isomorphisme de fibrés vectoriels du milieu est Υ^{-1}, induit par le produit scalaire sur $E \to M$.

La classification des algébroïdes de Courant exacts a été esquissée dans [Š00]. Nous détaillons ci-après le théorème de structure des algébroïdes de Courant exacts, ce théorème étant fondateur pour la géométrie complexe généralisée [Gua11] et à l'origine également de la notion de *dissection* d'un algébroïde de Courant régulier [CSX13, section 1.3] que l'on utilisera plus loin (voir la section 3.1 du chapitre 3).

Théorème 2.3.7 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ un algébroïde de Courant exact. Il existe un scindement de (2.35), donnant un isomorphisme de fibrés vectoriels $E \cong TM \oplus T^\vee M$, et il existe une 3-forme $\mathbf{d}$-fermée H, telle que la structure d'algébroïde de Courant sur $E \to M$ soit transportée sur $TM \oplus T^\vee M \to M$ par l'isomorphisme précédent selon

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(X \oplus \alpha) &= X, \\ \langle X \oplus \alpha, Y \oplus \beta\rangle &= \alpha(Y) + \beta(X), \\ [X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] &= [X, Y] \oplus \mathscr{L}_X\beta - \boldsymbol{\iota}_Y(\mathbf{d}\alpha) + \boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X H, \end{aligned}$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$; avec $\mathsf{D} = 0 \oplus \mathbf{d}$. On appellera l'algébroïde de Courant résultant de ce transport l'*algébroïde de Courant exact* sur M *associé à* la 3-forme H ; on le notera $\mathcal{E}_M[H]$.

Preuve : D'après [Hus94, chapitre 3, théorème 9.6], la suite exacte courte de fibrés vectoriels (2.35) est scindée : il existe un morphisme de fibrés $\varepsilon_0 : TM \to E$ tel que $\mathsf{a}_E \circ \varepsilon_0 = \mathrm{Id}$ (appelée *connexion* dans [Š00]). De plus on peut toujours choisir un scindement isotrope ε, c'est-à-dire tel que

$$\big\langle \varepsilon(X), \varepsilon(Y)\big\rangle_E = 0,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$; pour cela on pose $\phi : TM \to T^\vee M$ définie par $\phi(X)(Y) = \big\langle \varepsilon_0(X), \varepsilon_0(Y)\big\rangle_E$ puis $\varepsilon(X) = \varepsilon_0(X) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{a}_E^\vee\phi(X)\big)^\sharp$. Ce scindement permet d'obtenir l'isomorphisme de fibrés vectoriels $E \cong \varepsilon(TM) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(T^\vee M)^\sharp$. L'ancre a sur $TM \oplus T^\vee M \to M$ est alors donnée pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$ par

$$\mathsf{a}(X \oplus \alpha) = \mathsf{a}_E\big(\varepsilon(X) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp\big) = X,$$

et le produit scalaire par

$$\langle X \oplus \alpha, Y \oplus \beta\rangle = \big\langle \varepsilon(X) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \varepsilon(Y) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\big\rangle_E = \beta(X) + \alpha(Y),$$

en utilisant le caractère isotrope du scindement ε et (2.14). Le crochet est donné pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$ par

$$\begin{aligned}[X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] &= \left[\varepsilon(X) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \varepsilon(Y) \oplus \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E \\ &= \left[\varepsilon(X), \varepsilon(Y)\right]_E + \left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha), \varepsilon(Y)\right]_E + \left[\varepsilon(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)\right]_E.\end{aligned}$$

En effet, on remarque en appliquant a_E que le terme $\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E \in \Omega^1(M)$, et pour tout $Z \in \Gamma(TM)$ on a

$$\begin{aligned}\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E(Z) &= \left\langle \left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E, \varepsilon(Z)\right\rangle_E \\ &= \mathsf{a}_E\left((\Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}_E^\vee)(\alpha)\right) \cdot \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \varepsilon(Z)\right\rangle - \left\langle \alpha \,\middle|\, \mathsf{a}_E\left[\mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \varepsilon(Z)\right]_E\right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

A présent il faut calculer les trois termes restants. Pour le troisième terme on a $\mathsf{a}_E\left(\left[\varepsilon(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E\right) = 0$ donc $\left[\varepsilon(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E \in \Omega^1(M)$ et on calcule en utilisant (2.5), que pour tout $X, Z \in \Gamma(TM)$ et $\beta \in \Omega^1(M)$, on a

$$\left[\varepsilon(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E(Z) = \left\langle \left[\varepsilon(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E, \varepsilon(Z)\right\rangle_E = \boldsymbol{\iota}_Z \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta.$$

Pour le second terme, on a de manière similaire que $\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \varepsilon(Y)\right]_E = -\boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\alpha$. Pour le premier terme on a $\mathsf{a}_E\big([\varepsilon(X), \varepsilon(Y)]_E\big) = [X, Y] \in \Gamma(TM)$, il reste donc à calculer sa projection sur $T^\vee M \to M$. Posons

$$H(X, Y) = \mathrm{pr}_{T^\vee M}\left[\varepsilon(X), \varepsilon(Y)\right]_E \in \Omega^1(M),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. En utilisant (2.17) et l'isotropie on montre que H est $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-bilinéaire et antisymétrique en X et Y. De plus

$$\begin{aligned}H(X, Y)(Z) &= \big\langle [\varepsilon(X), \varepsilon(Y)]_E, \varepsilon(Z)\big\rangle_E \\ &= \mathsf{a}_E\big(\varepsilon(X)\big) \cdot \big\langle \varepsilon(X), \varepsilon(Y)\big\rangle_E - \big\langle \varepsilon(Y), [\varepsilon(X), \varepsilon(Z)]_E\big\rangle_E \\ &= -H(X, Z)(Y),\end{aligned}$$

et $Z \in \Gamma(TM) \mapsto H(X, Y)(Z)$ est bien $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en Z pour X et $Y \in \Gamma(TM)$ fixés ; donc H définit une 3-forme sur M (encore notée H). Ainsi $\left[\varepsilon(X), \varepsilon(Y)\right]_E = \varepsilon\big([X, Y]\big) + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_Y H$. Il reste à montrer que l'ancre, le produit scalaire et le crochet satisfont tous les axiomes de la définition d'algébroïde de Courant. Pour ce faire il faut utiliser les identités

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\mathscr{L}}_X, \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y] = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{[X,Y]}, \quad [\boldsymbol{\mathscr{L}}_X, \boldsymbol{\iota}_Y] = \boldsymbol{\iota}_{[X,Y]}, \quad [\boldsymbol{\iota}_X, \mathbf{d}] = \boldsymbol{\mathscr{L}}_X, \\ [\boldsymbol{\mathscr{L}}_X, \mathbf{d}] = 0, \quad [\mathbf{d}, \mathbf{d}] = 0, \quad [\boldsymbol{\iota}_X, \boldsymbol{\iota}_Y] = 0,\end{gathered}$$

pour le commutateur gradué des dérivations sur l'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée des formes différentielles, ainsi que l'expression de la dérivée extérieure d'une 1-forme α sur M :

$$\mathbf{d}\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha\big([X, Y]\big).$$

L'identité de Leibniz (2.1) est satisfaite si et seulement si H est $\mathbf{d}$-fermée. $\square$

Au cours de la preuve précédente, nous avons établi la proposition suivante, en utilisant les relations vérifiées par le triplet de Cartan associé à l'algébroïde de Lie canonique $\mathcal{T}_M$ sur une variété M (voir définition 1.4.9 et théorème 1.4.7).

Proposition 2.3.8 : Soit M une variété. Toute 3-forme différentielle H sur une variété M $\mathbf{d}$-fermée équipe le fibré vectoriel $TM \oplus T^\vee M \to M$ d'une structure d'algébroïde de Courant donnée par

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(X \oplus \alpha) &= X, \\ \langle X \oplus \alpha, Y \oplus \beta \rangle &= \alpha(Y) + \beta(X), \\ [X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] &= [X, Y] \oplus \mathscr{L}_X \beta - \boldsymbol{\iota}_Y(\mathbf{d}\alpha) + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H, \end{aligned}$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$; avec $\mathsf{D} = 0 \oplus \mathbf{d}$.

Proposition 2.3.9 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle \cdot,\cdot \rangle_E)$ un algébroïde de Courant exact. Soit ε et ε' deux scindements isotropes de la suite exacte courte de fibrés vectoriels (2.35), ainsi que H et H' les 3-formes différentielles associés à ces scindements, et dont l'existence est assurée par le théorème précédent. Alors $B = \varepsilon - \varepsilon' \in \Omega^2(M)$ et $H - H' = \mathbf{d}B$. Par conséquent la classe de cohomologie $[H] \in \mathbf{H}^3(M)$ ne dépend pas du choix de scindement (sous-entendu isotrope) pour (2.35) ; $[H]$ est appelée la *classe de Ševera* de $\mathcal{E}$.

Preuve : Puisque $\mathsf{a}_E \circ (\varepsilon - \varepsilon') = 0$ il vient que $B = \varepsilon - \varepsilon' : TM \to T^\vee M$. Remarquons que $\big\langle B(X), B(X) \big\rangle_E = 0$ car $B(X) \in \Gamma(T^\vee M)$ et donc $\big\langle \varepsilon(X), \varepsilon'(X) \big\rangle_E = 0$; par conséquent B est une 2-forme sur M car pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} B(X)(X) &= (\varepsilon - \varepsilon')(X)(X) \\ &= \big\langle (\varepsilon - \varepsilon')(X), \varepsilon(X) \big\rangle_E \\ &= -\big\langle \varepsilon'(X), \varepsilon(X) \big\rangle_E \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le changement de scindement laisse invariants l'ancre ainsi que le produit scalaire au sens où

$$\begin{aligned} \mathsf{a}_E\big(\varepsilon'(X)\big) &= \mathsf{a}_E\big(\varepsilon(X)\big), \\ \big\langle \varepsilon'(X), \varepsilon'(Y) \big\rangle_E &= \big\langle \varepsilon(X), \varepsilon(Y) \big\rangle_E, \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. Reste à comprendre comment change le crochet et donc la 3-forme différentielle H. Pour tout $X \in \Gamma(TM)$ écrivons que $\varepsilon'(X) = \varepsilon(X) - B(X)$, on calcule alors que

$$\begin{aligned} \big[\varepsilon'(X), \varepsilon'(Y)\big]_E &= \big[\varepsilon(X) - B(X), \varepsilon(Y) - B(Y)\big]_E \\ &= \big[\varepsilon(X), \varepsilon(Y)\big]_E - \big[\varepsilon(X), B(Y)\big]_E - \big[B(X), \varepsilon(Y)\big]_E \\ &= \varepsilon\big([X, Y]\big) \oplus \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H - \mathscr{L}_X\big(B(Y)\big) + \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\big(B(X)\big) \\ &= \varepsilon\big([X, Y]\big) \oplus \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H - \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}B - \boldsymbol{\iota}_{[X,Y]} B \\ &= \varepsilon'\big([X, Y]\big) + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X (H - \mathbf{d}B). \end{aligned}$$

Par conséquent effectuer un changement de scindement isotrope revient à changer H en $H - \mathbf{d}B$ avec $B \in \Omega^2(M)$. □

Remarque 2.3.10 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[H]$ l'algébroïde de Courant exact sur M associé à $H \in \Omega^3(M)$ (voir théorème 2.3.7). Le crochet de Dorfman de $\mathcal{E}_M[H]$ est donné pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ par

$$[X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] = [X, Y] \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta - \boldsymbol{\iota}_Y(\mathbf{d}\alpha) + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H,$$

tandis que le crochet de Courant de $\mathcal{E}_M[H]$ est donné par

$$[\![X \oplus \alpha, Y \oplus \beta]\!] = [X, Y] \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta - \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y \alpha - \frac{1}{2}\mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_X \beta - \boldsymbol{\iota}_Y \alpha\big) + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Exemple 2.3.11 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ un algébroïde de Lie. Alors on a une structure d'algébroïde de Courant sur le fibré $A \oplus A^\vee \to M$ donnée par

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(u \oplus \alpha) &= \mathsf{a}_A(u), \\ \langle u \oplus \alpha, v \oplus \beta \rangle &= \alpha(v) + \beta(u), \\ [u \oplus \alpha, v \oplus \beta] &= [u, v]_A \oplus \mathscr{L}_u \beta - \iota_v(\mathrm{d}\alpha), \end{aligned}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$, $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{A})$; et $\mathsf{D} = 0 \oplus \mathrm{d}$. On peut également « tordre » le crochet par une 3-forme différentielle H sur $\mathcal{A}$ qui est d-fermée, le crochet devient alors

$$[u \oplus \alpha, v \oplus \beta] = [u, v]_A \oplus \mathscr{L}_u \beta - \iota_v(\mathrm{d}\alpha) + \iota_v \iota_u H.$$

On remarque en particulier que lorsque $\mathcal{A}$ est l'algébroïde de Lie canonique $\mathcal{T}_M$ associé à une variété M (exemple 1.2.4), cette construction redonne la structure d'algébroïde de Courant exact sur $TM \oplus T^\vee M \to M$ associée à $H \in \Omega^3(\mathcal{T}_M) = \Omega^3(M)$.

2.3.2 Bigébroïdes de Lie

Définition 2.3.12 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie tels que les fibrés vectoriels $A \to M$ et $B \to M$ soient en dualité par une forme bilinéaire non dégénérée $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle : \Gamma(A) \times \Gamma(B) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. On dispose alors de deux isomorphismes de fibrés vectoriels, définis au niveau des sections par $\Upsilon_A : \Gamma(A) \to \Gamma(B^\vee), u \mapsto \langle\!\langle u, \cdot \rangle\!\rangle$ et $\Upsilon_B : \Gamma(B) \to \Gamma(A^\vee), v \mapsto \langle\!\langle \cdot, v \rangle\!\rangle$. Notons d_A (respectivement d_B) la dérivée extérieure de $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) et $\delta_A = \Lambda^\bullet \Upsilon_B^{-1} \circ \mathrm{d}_A \circ \Lambda^\bullet \Upsilon_B$. On dit que ces deux algébroïdes de Lie forme un *bigébroïde de Lie* [LWX97, définition 2.4] si la relation de compatibilité

$$\delta_A[\xi, \eta]_B = \big[\delta_A \xi, \eta\big]_B + (-1)^{k-1}\big[\xi, \delta_A \eta\big]_B, \tag{2.36}$$

est satisfaite pour tous $\xi \in \Gamma(\Lambda^k B)$ et $\eta \in \Gamma(\Lambda^\bullet B)$. Autrement dit, δ_A est une dérivation de l'algèbre $\Gamma(\Lambda^\bullet B)$ pour le crochet de Schouten-Nijenhuis (voir section 1.7). La condition ci-dessus est symétrique ; on aurait pu demander que $\delta_B = \Lambda^\bullet \Upsilon_A^{-1} \circ \mathrm{d}_B \circ \Lambda^\bullet \Upsilon_A$ soit une dérivation de $\Gamma(\Lambda^\bullet A)$ (voir [MX94, théorème 3.10] et [KS95, proposition 3.3]). On notera ce bigébroïde de Lie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle)$ ou simplement $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dans le cas où la forme bilinéaire est naturelle.

Exemple 2.3.13 : Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ un bigébroïde de Lie, avec $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$. Le fibré vectoriel $A \oplus B \to M$ admet une structure d'algébroïde de Courant donnée par

$$\mathsf{a}(u \oplus \alpha) = \mathsf{a}_A(u) + \mathsf{a}_B(\alpha),$$
$$\langle u \oplus \alpha, v \oplus \beta\rangle = \langle\!\langle \alpha, v\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \beta, u\rangle\!\rangle,$$
$$[u \oplus \alpha, v \oplus \beta] = [u,v]_A + \mathscr{L}^B_\alpha v - \iota^B_\beta(\mathrm{d}_B u) \oplus [\alpha,\beta]_B + \mathscr{L}^A_u \beta - \iota^A_v(\mathrm{d}_A \alpha),$$

pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ et $\alpha, \beta \in \Gamma(B)$; et $\mathsf{D} = \mathrm{d}_A \oplus \mathrm{d}_B$. Cette construction est appelée le *double* d'un bigébroïde de Lie ([LWX97, théorème 2.5]).

Exemple 2.3.14 : Une bigèbre de Lie [LGPV13, définition 11.17] est un cas particulier de l'exemple 2.3.13. Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ une bigèbre de Lie (donc un algébroïde de Lie sur un point) ; $(\mathfrak{g}^\vee, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^\vee})$ est donc également une algèbre de Lie. La condition (2.36) est satisfaite (voir [LGPV13, équation 11.24]). On obtient une structure d'algébroïde de Courant sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\vee$ (sur un point), qui n'est autre que le triplet de Manin associé à $\mathfrak{g}$ (voir [LGPV13, proposition 11.28]). Ainsi $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\vee$ est une algèbre de Lie quadratique dont le crochet est donné par

$$[x \oplus \xi, y \oplus \eta] = [x,y]_\mathfrak{g} + \mathrm{ad}^*_\xi(y) - \mathrm{ad}^*_\eta(x) \oplus [\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^\vee} + \mathrm{ad}^*_x(\eta) - \mathrm{ad}^*_y(\xi),$$

où $\mathrm{ad}^*_x(\eta) = -\,\mathrm{ad}^\vee_x(\eta) = \mathscr{L}_x \eta$ (voir définition 1.4.5) et similairement pour $\mathrm{ad}^*_\eta(x)$, et le produit scalaire par $\langle x \oplus \xi, y \oplus \eta\rangle = \xi(y) + \eta(x)$, pour tous x, $y \in \mathfrak{g}$ et $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^\vee$. Voir également [Roy99, section 2.1].

Exemple 2.3.15 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot])$ un algébroïde de Lie et considérons $A^\vee \to M$ le fibré vectoriel dual, muni de la structure d'algébroïde de Lie triviale, c'est-à-dire d'ancre et de crochet nuls. Dans ce cas l'exemple 2.3.13 redonne l'algébroïde de Courant de l'exemple 2.3.11. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'algébroïde de Lie $\mathcal{T}_M$ associé à une variété M (exemple 1.2.4), on retrouve l'algébroïde de Courant exact sur M avec $H = 0$ (voir le théorème 2.3.7).

Exemple 2.3.16 : Soit (M, π) une variété de Poisson et considérons l'algébroïde de Lie $\mathcal{P}_M[\pi]$ associé (exemple 1.2.5). La différentielle de l'algébroïde de Lie est la différentielle de Lichnerowicz-Poisson $\mathrm{d}_\pi = [\pi, \cdot]_{\mathsf{SN}}$ pour le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\cdot,\cdot]_{\mathsf{SN}}$ sur $\Gamma(\Lambda^\bullet TM)$. Alors cet algébroïde de Lie avec l'algébroïde de Lie canonique $\mathcal{T}_M$ forment un bigébroïde de Lie. En effet en utilisant l'identité de Jacobi graduée on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\pi[\xi,\eta]_{\mathsf{SN}} &= -\big[\pi, [\xi,\eta]_{\mathsf{SN}}\big]_{\mathsf{SN}} \\
&= -\big[[\pi,\xi]_{\mathsf{SN}}, \eta\big]_{\mathsf{SN}} - (-1)^{k-1}\big[\xi, [\pi,\eta]_{\mathsf{SN}}\big]_{\mathsf{SN}} \\
&= [\mathrm{d}_\pi \xi, \eta]_{\mathsf{SN}} + (-1)^{k-1}[\xi, \mathrm{d}_\pi \eta]_{\mathsf{SN}},
\end{aligned}$$

pour tous $\xi \in \Gamma(\Lambda^k TM)$ et $\eta \in \Gamma(\Lambda^\bullet TM)$.

Exemple 2.3.17 : A toute variété de Poisson-Nijenhuis (voir [KSM90, définition 4.1]) correspond un bigébroïde de Lie [KS96b, proposition 3.2], que l'on peut doubler d'après l'exemple 2.3.13 pour obtenir un algébroïde de Courant.

Remarque 2.3.18 : Il existe une obstruction pour qu'un algébroïde de Courant donné provienne d'un bigébroïde de Lie doublé au sens de l'exemple 2.3.13, il s'agit de la *classe modulaire* apparue dans [SX08], généralisation de la classe modulaire en géométrie de Poisson (voir [KS08] pour une vue générale de cette notion).

Remarque 2.3.19 : Il est possible de « tordre » un bigébroïde de Lie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ en un certain sens, on obtient alors la notion générale de *proto-bigébroïde de Lie* (voir [KS05, section 1.5]). Il existe une construction similaire à celle de l'exemple 2.3.13 appelée *double d'un proto-bigébroïde de Lie*, dont le résultat est un algébroïde de Courant [KS05, section 3.2].

2.4 Produit cartésien d'algébroïdes de Courant

Dans la section 2.6 sur les morphismes entre algébroïdes de Courant nous aurons besoin d'une notion de produit cartésien, donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.4.1 : Considérons deux algébroïdes de Courant

$$\mathcal{E} = \big(E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E\big) \text{ et } \mathcal{F} = \big(F \to N, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F\big).$$

Le fibré vectoriel produit $E \times F \to M \times N$ est muni d'une structure d'algébroïde de Courant canonique, où l'ancre a et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont obtenus en imposant la $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$-linéarité et le crochet $[\cdot,\cdot]$ est obtenu en imposant les règles de Leibniz (2.10) et (2.9) pour les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$, puisque $\Gamma(E\times F)$ est un $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$-module. L'algébroïde de Courant qui résulte de cette construction est appelé *produit cartésien* de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et noté $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$.

Preuve : Rappelons que, d'après les propriétés universelles de la somme de Whitney et du produit cartésien de fibrés vectoriels, le fibré vectoriel produit $E \times F \to M \times N$ est isomorphe au fibré vectoriel $\mathrm{pr}_M^! E \oplus \mathrm{pr}_N^! F \to M \times N$, où pr_M (respectivement pr_N) désigne la projection $M \times N \to M$ (respectivement $M \times N \to N$). Par conséquent une section du produit cartésien s'écrit comme une combinaison $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$-linéaire à support fini de termes de la forme $\mathrm{pr}_M^! u \oplus \mathrm{pr}_N^! v$, avec $u \in \Gamma(E)$ et $v \in \Gamma(F)$. On dispose également de l'isomorphisme de fibrés vectoriels $T(M \times N) \cong \mathrm{pr}_M^! TM \oplus \mathrm{pr}_N^! TN$ (voir [GHV72, paragraphe 3.7, section 1, chapitre 3]). On définit l'ancre $\mathsf{a} : E \times F \to T(M \times N)$ du produit cartésien sur les sections par

$$\mathsf{a}\big(\mathrm{pr}_M^! u \oplus \mathrm{pr}_N^! v\big) = \mathrm{pr}_M^! \mathsf{a}_E(u) \oplus \mathrm{pr}_N^! \mathsf{a}_F(v) \in \Gamma\big(T(M \times N)\big),$$

que l'on étend à tout $\Gamma(E \times F)$ en imposant la $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$-linéarité (en particulier, a est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire et $\mathcal{C}^\infty(N)$-linéaire). Le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ du produit cartésien est défini sur les sections par

$$\big\langle \mathrm{pr}_M^! u \oplus \mathrm{pr}_N^! v, \mathrm{pr}_M^! u' \oplus \mathrm{pr}_N^! v'\big\rangle = \langle u, u'\rangle_E + \langle v, v'\rangle_F \in \mathcal{C}^\infty(M \times N),$$

que l'on étend à tout $\Gamma(E\times F)$ en imposant la $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$-linéarité (en particulier, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire et $\mathcal{C}^\infty(N)$-linéaire). Le crochet $[\cdot,\cdot]$ du produit cartésien est défini par

$$\big[\mathrm{pr}_M^! u \oplus \mathrm{pr}_N^! v, \mathrm{pr}_M^! u' \oplus \mathrm{pr}_N^! v'\big] = \mathrm{pr}_M^! [u, u']_E \oplus \mathrm{pr}_N^! [v, v']_F \in \Gamma(E \times F),$$

que l'on étend à tout $\Gamma(E\times F)$ en imposant la règle de Leibniz (2.10)

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v, f\left(\mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right)\right] &= f\left[\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v, \mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right]\\ &\quad + \left(\mathsf{a}\left(\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v\right)\cdot f\right)\left(\mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right),\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(M\times N)$, ainsi que la règle de Leibniz à droite (2.9)

$$\begin{aligned}\left[f\left(\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v\right), \mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right] &= f\left[\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v, \mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right]\\ &\quad - \left(\mathsf{a}\left(\mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right)\cdot f\right)\left(\mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v\right)\\ &\quad + \left\langle \mathrm{pr}_M^! u\oplus \mathrm{pr}_N^! v, \mathrm{pr}_M^! u'\oplus \mathrm{pr}_N^! v'\right\rangle \mathsf{D}f,\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(M\times N)$, avec $\mathsf{D}=(\Upsilon_E^{-1}\times\Upsilon_F^{-1})\circ\mathsf{a}^\vee\circ\mathbf{d}$ qui est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M\times N)$. Avec ces définitions, on montre que $E\times F\to M\times N$ possède une structure d'algébroïde de Courant, d'ancre a, de crochet $[\cdot,\cdot]$ et de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\square$

Exemple 2.4.2 : Soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie quadratiques. Alors $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ peuvent être considérées comme algébroïdes de Courant au-dessus d'un point (voir exemple 2.3.1). Le produit cartésien $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ au sens de la proposition précédente s'identifie à la somme directe de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$.

Exemple 2.4.3 : Soit M et N deux variétés et soit $\mathcal{E}_M[H_M]$ et $\mathcal{E}_N[H_N]$ les algébroïdes de Courant exacts associés aux 3-formes $H_M\in\Omega^3(M)$ et $H_N\in\Omega^3(N)$ (voir le théorème 2.3.7). Alors l'isomorphisme de fibrés vectoriels couvrant l'identité

$$\Phi:\begin{cases}(TM\oplus T^\vee M)\times(TN\oplus T^\vee N)\to T(M\times N)\oplus T^\vee(N\times N)\\ \left(\mathrm{pr}_M^!(X_M\oplus\xi_M),\mathrm{pr}_N^!(X_N\oplus\xi_N)\right)\mapsto\left(\mathrm{pr}_M^! X_M\oplus\mathrm{pr}_N^! X_N,\mathrm{pr}_M^!\xi_M\oplus\mathrm{pr}_N^!\xi_N\right)\end{cases}$$

induit un isomorphisme d'algébroïdes de Courant $\mathcal{E}_M[H_M]\times\mathcal{E}_N[H_N]\cong\mathcal{E}_{M\times N}[\mathrm{pr}_M^* H_M+\mathrm{pr}_N^* H_N]$ au sens de 2.6.1.

2.5 Structures de Dirac d'algébroïdes de Courant

Définition 2.5.1 : Soit $E\to M$ un fibré vectoriel équipé d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Un sous-fibré vectoriel $F\to M$ de $E\to M$ est *isotrope* si $\langle u,v\rangle=0$ pour tous $u,v\in\Gamma(F)$; autrement dit si $F\subset F^\perp$. On dira que $F\to M$ est *coisotrope* si $F^\perp\subset F$. Enfin on dira que $F\to M$ est *lagrangien* si $F\to M$ est à la fois isotrope et coisotrope, c'est-à-dire si $F=F^\perp$.

Remarque 2.5.2 : Soit $E\to M$ un fibré vectoriel équipé d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $F\to M$ un sous-fibré vectoriel de $E\to M$. Par définition $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire non-dégénérée donc $\mathrm{rg}(F)+\mathrm{rg}(F^\perp)=\mathrm{rg}(E)$ (voir [Gre75, proposition 2, chapitre 2]). Si $F\to M$ est isotrope, par définition $F\subset F^\perp$ donc $\mathrm{rg}(F)\leq\frac12\mathrm{rg}(E)$. Si $F\to M$ est lagrangien, par définition $F=F^\perp$ donc $\mathrm{rg}(F)=\frac12\mathrm{rg}(E)$.

Lemme 2.5.3 : Soit $E\to M$ un fibré vectoriel équipé d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $F\to M$ un sous-fibré vectoriel non nul de $E\to M$. Alors $F\to M$ est lagrangien si et seulement si $F\to M$ est isotrope maximal (pour la relation d'inclusion).

Preuve : Supposons que $F \to M$ est lagrangien et montrons que $F \to M$ est isotrope maximal. Soit $G \to M$ un sous-fibré vectoriel isotrope de $E \to M$ tel que $F \subset G \subset E$. Par isotropie de G puis coisotropie de F on a $G \subset G^\perp \subset F^\perp \subset F$ et donc $F \to M$ est maximal. Réciproquement, supposons que $F \to M$ est isotrope maximal. D'après la remarque 2.5.2, $F \to M$ est lagrangien. □

Définition 2.5.4 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit $F \to M$ un sous-fibré vectoriel de $E \to M$. On dira que $F \to M$ est *involutif* si $[u,v] \in \Gamma(F)$ pour tous $u, v \in \Gamma(F)$.

Lemme 2.5.5 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit $L \to M$ un sous-fibré vectoriel de $E \to M$ isotrope et involutif. Alors le fibré vectoriel $L \to M$ est un algébroïde de Lie. En particulier, tout sous-fibré vectoriel lagrangien et involutif de $E \to M$ est un algébroïde de Lie.

Preuve : L'ancre de $L \to M$ est la restriction de a à $L \to M$. Puisque $L \to M$ est isotrope, d'après (2.7), le crochet $[\cdot,\cdot]$ restreint à $\Gamma(L)$, qui est bien à valeurs dans $\Gamma(L)$ d'après l'involutivité, confère à $\Gamma(L)$ une structure d'algèbre de Lie. La règle de Leibniz à droite (1.1) (et à gauche également) est satisfaite, donc $\big(L \to M, \mathsf{a}|_L, [\cdot,\cdot]|_{\Gamma(L)}\big)$ est un algébroïde de Lie. □

Définition 2.5.6 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant.

- Une *structure de Dirac* de $\mathcal{E}$ est un sous-fibré vectoriel $L \to M$ lagrangien (voir définition 2.5.1).
- Une structure de Dirac $L \to M$ de $\mathcal{E}$ est *intégrable* si de plus $L \to M$ est involutif (voir définition 2.5.4).

Remarque 2.5.7 : Les structures de Dirac telles qu'elles sont définies dans la littérature sur les algébroïdes de Courant (voir [LWX97, définition 2.2]) sont exigées d'être intégrables. Les structures de Dirac définies ci-dessus sont parfois appelées *structures presque-Dirac*. Cette terminologie suit celle de [Cou90] et de la mécanique géométrique.

Nous donnons à présent une caractérisation de l'intégrabilité d'une structure de Dirac d'un algébroïde de Courant.

Lemme 2.5.8 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit Nij la fonction de Nijenhuis (2.22). Alors, pour tous $u, v, w \in \Gamma(E)$ on a

$$\mathsf{Nij}(u,v,w) = 3\big\langle [u,v], w\big\rangle - \mathsf{a}(u)\cdot\langle v,w\rangle + \mathsf{a}(v)\cdot\langle w,u\rangle - \mathsf{a}(w)\cdot\langle u,v\rangle. \qquad (2.37)$$

Preuve : Soit u, v, w trois sections de $E \to M$. Par définition on a

$$\mathsf{Nij}(u,v,w) = \big\langle [\![u,v]\!], w\big\rangle + \big\langle [\![w,u]\!], v\big\rangle + \big\langle [\![v,w]\!], u\big\rangle.$$

Dans le premier terme on utilise (2.23) pour faire apparaître $\big\langle [u,v], w\big\rangle$, puis dans le deuxième et troisième termes on utilise (2.20), l'antisymétrie du crochet $[\![\cdot,\cdot]\!]$ et (2.23) pour faire apparaître deux autres termes $\big\langle [u,v], w\big\rangle$. En additionnant on obtient la formule (2.37). □

Remarque 2.5.9 : En général, la fonction de Nijenhuis n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-trilinéaire.

Proposition 2.5.10 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit $L \to M$ un sous-fibré vectoriel de $E \to M$ lagrangien, alors $L \to M$ est involutif si et seulement si $\mathsf{Nij}\,|_{\Gamma(L)} = 0$, où Nij est la fonction de Nijenhuis (2.22).

Preuve : Puisque $L \to M$ est isotrope, pour toutes sections u, v, w de ce fibré vectoriel la fonction de Nijenhuis est réduite à $\mathsf{Nij}(u, v, w) = 3\big\langle [u, v], w\big\rangle$ d'après (2.37). Si $L \to M$ est involutif, alors par isotropie la fonction de Nijenhuis est nulle. Réciproquement, si la fonction de Nijenhuis est nulle pour tous u, v et $w \in \Gamma(L)$ il vient $[u, v] \in \Gamma(F^\perp) \subset \Gamma(F)$ par coisotropie, et donc $L \to M$ est involutif. □

Remarque 2.5.11 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et $L \to M$ un sous-fibré vectoriel lagrangien de $E \to M$. Un avantage de la fonction de Nijenhuis est que l'on a transformé une question d'involutivité sur le crochet $[\cdot,\cdot]$ non $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire en la nullité du tenseur $\mathsf{Nij}\,|_{\Gamma(L)} \in \Gamma(\Lambda^3 L^\vee)$, qui est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en chaque argument, ce qui simplifie le calcul (voir l'exemple 2.5.17).

La littérature regorge d'exemples de structures de Dirac, elles sont apparues dans [Cou90] avant la notion d'algébroïde de Courant. Une preuve de la proposition 2.5.10 a été donnée dans [Cou90, proposition 2.2.3] pour les algébroïdes de Courant exacts. Les structures de Dirac jouent un rôle important notamment en mécanique géométrique (voir, par exemple, [YM06a] et [YM06b], [LS12], [GBY15] ainsi que l'article original [Cou90, section 3.3]) et en géométrie complexe généralisée ([Gua11, section 2.4] dont les exemples qui suivent sont principalement issus, et [Gua11, section 3.2]).

Exemple 2.5.12 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[0]$ l'algébroïde de Courant exact associé à la 3-forme nulle sur M (voir le théorème 2.3.7). Alors $TM \to M$ et $T^\vee M \to M$ sont deux structures de Dirac intégrables de $\mathcal{E}_M[0]$.

Nous aurons besoin de la notion de graphe d'une application lisse et d'un morphisme de fibrés vectoriels que nous rappelons maintenant. Étant données M et N deux variétés et une application lisse $f : M \to N$ le *graphe* de f est l'ensemble

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\big\}.$$

Le graphe $\mathrm{Gr}(f)$ de f est une sous-variété (plongée) de la variété produit $X \times Y$ ([Lee13, proposition 5.4]).

Lemme 2.5.13 : Soit $\pi : E \to M$ et $\varpi : F \to N$ deux fibrés vectoriels respectivement de rang n_E et n_F, et soit $(\varphi, \Phi) : E \to F$ un morphisme entre ces deux fibrés vectoriels. Alors l'application $\Pi : \mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ définie par

$$\Pi\big(v, \Phi(v)\big) = \big(\pi(v), \varphi(\pi(v))\big) = \big(\pi(v), \varpi(\Phi(v))\big)$$

pour tous $v \in E$, est un sous-fibré vectoriel du produit cartésien $\pi \times \varpi : E \times F \to M \times N$.

Preuve : L'application Π est surjective puisque π l'est. Un ouvert de $\mathrm{Gr}(\varphi)$ est l'intersection avec $\mathrm{Gr}(\varphi)$ d'un produit d'ouverts $U \times V$, $U \subset M$, $V \subset N$. Alors on a un difféomorphisme

$$\Pi^{-1}(U \times V) = \pi^{-1}(U) \times \varpi^{-1}(V) \xrightarrow{\Psi^E_U \times \Psi^F_V} (U \times V) \times \mathbb{R}^{n_E + n_F},$$

où Ψ_U^E (respectivement Ψ_V^F) désigne une trivialisation locale de $E \to M$ (respectivement $F \to N$) au-dessus de l'ouvert U (respectivement V), ce qui montre que $\Pi : \mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est un fibré vectoriel. La fibre de Π au-dessus de $(x, \varphi(x)) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$ est $E_x \times \Phi(E_x) \subset E_x \times F_x$, donc $\Pi : \mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est un sous-fibré vectoriel du produit cartésien $\pi \times \varpi : E \times F \to M \times N$. □

Remarque 2.5.14 : Reprenons les notations du lemme précédent. Dans le cas où le morphisme $\Phi : E \to F$ couvre l'identité, on obtient le fibré vectoriel d'espace total $\mathrm{Gr}\,\Phi \cong \big\{u \oplus \Phi(u) \in E \oplus F : u \in E\big\}$ et de base $M \times M$, que l'on réduit à M.

Exemple 2.5.15 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[0]$ l'algébroïde de Courant exact associé à la 3-forme nulle sur M (voir l'exemple 2.35). Soit $\omega \in \Omega^2(M)$ et considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\omega^\flat : TM \to T^\vee M$, $v \in T_xM \mapsto \omega_x(v, \cdot) \in T_x^\vee M$ couvrant l'identité. Puisque $\omega^\flat$ couvre l'identité, on a

$$\Gamma(\mathrm{Gr}\,\omega^\flat) = \big\{X \oplus \boldsymbol{\iota}_X\omega : X \in \Gamma(TM)\big\} \subset \Gamma(TM \oplus T^\vee M).$$

Alors $\mathrm{Gr}\,\omega^\flat \to M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}_M[0]$ intégrable si et seulement si $\mathbf{d}\omega = 0$, c'est-à-dire si ω est *pré-symplectique* (ω n'est pas *nécessairement* non dégénérée). En effet, par antisymétrie de ω, $\mathrm{Gr}\,\omega^\flat \to M$ est un sous-fibré vectoriel isotrope de $TM \oplus T^\vee M \to M$. Montrons à présent la coisotropie. Soit $X \oplus \alpha \in \Gamma\big(\mathrm{Gr}(\omega^\flat)^\perp\big)$, on a donc

$$\langle X \oplus \alpha, Y \oplus \boldsymbol{\iota}_Y\omega\rangle = 0,$$

pour tout $Y \in \Gamma(TM)$. Ce qui donne $\alpha(Y) + \omega(Y, X) = 0$, et donc $\alpha = \boldsymbol{\iota}_X\omega$. On en déduit que $\mathrm{Gr}\,\omega^\flat \to M$ est coisotrope. Reste à considérer l'involutivité. Pour tous X, $Y \in \Gamma(TM)$ on a d'après les identités de Cartan portant sur $\boldsymbol{\mathscr{L}}_X$, $\mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\iota}_X$ que

$$\begin{aligned}[X \oplus \boldsymbol{\iota}_X\omega, Y \oplus \boldsymbol{\iota}_Y\omega] &= [X, Y] \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X\boldsymbol{\iota}_Y\omega - \boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_X\omega \\ &= [X, Y] \oplus \boldsymbol{\iota}_{[X,Y]}\omega + \boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X\mathbf{d}\omega,\end{aligned}$$

et par conséquent l'involutivité équivaut à $\mathbf{d}\omega = 0$.

Exemple 2.5.16 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[H]$ l'algébroïde de Courant exact associé à $H \in \Omega^3(M)$ (voir théorème 2.3.7). Soit $\omega \in \Omega^2(M)$. Un raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent montre que $\mathrm{Gr}\,\omega^\flat \to M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}_M[H]$, intégrable si et seulement si $H = -\mathbf{d}\omega$.

Exemple 2.5.17 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[0]$ l'algébroïde de Courant exact associé à la 3-forme nulle (voir théorème 2.3.7). Soit $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ et considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\pi^\sharp : T^\vee M \to TM$, $\alpha \in T_x^\vee M \mapsto \pi(\alpha, \cdot) \in T_xM$ couvrant l'identité. Puisque $\pi^\sharp$ couvre l'identité, on a

$$\Gamma(\mathrm{Gr}\,\pi^\sharp) = \big\{\pi^\sharp(\alpha) \oplus \alpha : \alpha \in \Gamma(T^\vee M)\big\} \subset \Gamma(TM \oplus T^\vee M).$$

Alors $\mathrm{Gr}(\pi^\sharp) \to M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}_M[0]$ intégrable si et seulement si (M, π) est une variété de Poisson. En effet, par antisymétrie de π, $\mathrm{Gr}\,\pi^\sharp \to M$ est un sous-fibré vectoriel isotrope de $TM \oplus T^\vee M \to M$ et on montre la coisotropie d'une manière similaire à l'exemple 2.5.15. Reste à considérer l'involutivité, et pour cela nous utilisons la proposition 2.5.10 qui caractérise l'involutivité par la nullité de la fonction Nij de Nijenhuis. Puisque $\pi^\sharp$ et $\mathsf{Nij}\,|_{\Gamma(\mathrm{Gr}\,\pi^\sharp)}$ sont $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaires en tout argument, il suffit de montrer que $\mathsf{Nij}\,|_{\Gamma(\mathrm{Gr}\,\pi^\sharp)} = 0$ pour des éléments de la forme $\alpha = \mathbf{d}f$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Le premier terme est

$$\Big\langle \big[\!\big[\pi^\sharp(\mathbf{d}f) \oplus \mathbf{d}f, \pi^\sharp(\mathbf{d}g) \oplus \mathbf{d}g\big]\!\big], \pi^\sharp(\mathbf{d}h) \oplus \mathbf{d}h \Big\rangle,$$

ce qui est égal (d'après la remarque 2.3.10) à

$$\Big\langle \big[\pi^\sharp(\mathbf{d}f), \pi^\sharp(\mathbf{d}g)\big] \oplus \mathscr{L}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}\mathbf{d}g - \mathscr{L}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}g)}\mathbf{d}f - \frac{1}{2}\mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}\mathbf{d}g - \boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}g)}\mathbf{d}f\big), \\ \pi^\sharp(\mathbf{d}h) \oplus \mathbf{d}h \Big\rangle,$$

or, en notant $\{f,g\} = \pi(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g)$, on a $\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}\mathbf{d}g = \{f,g\}$ et, d'après la formule magique de Cartan, on a $\mathscr{L}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}\mathbf{d}g = \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}\mathbf{d}g = \mathbf{d}\{f,g\}$, donc on obtient

$$\begin{aligned}\Big\langle \big[\pi^\sharp(\mathbf{d}f), \pi^\sharp(\mathbf{d}g)\big] \oplus \mathbf{d}\{f,g\}, \pi^\sharp(\mathbf{d}h) \oplus \mathbf{d}h \Big\rangle &= \pi^\sharp(\mathbf{d}h)\big(\mathbf{d}\{f,g\}\big) + \big[\pi^\sharp(\mathbf{d}f), \pi^\sharp(\mathbf{d}g)\big] \cdot h \\ &= \big\{h, \{f,g\}\big\} + \big\{f, \{g,h\}\big\} - \big\{g, \{f,h\}\big\}.\end{aligned}$$

A présent en effectuant les permutations circulaires et en sommant on obtient

$$\begin{aligned}&\mathsf{Nij}\left(\pi^\sharp(\mathbf{d}f) \oplus \mathbf{d}f, \pi^\sharp(\mathbf{d}g) \oplus \mathbf{d}g, \pi^\sharp(\mathbf{d}h) \oplus \mathbf{d}h\right) \\ &\qquad\qquad = 3\Big(\big\{f, \{g,h\}\big\} + \big\{g, \{h,f\}\big\} + \big\{h, \{f,g\}\big\}\Big),\end{aligned}$$

par conséquent $\mathrm{Gr}(\pi^\sharp) \to M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}_M[0]$ intégrable si et seulement si (M,π) est une variété de Poisson.

L'exemple qui suit est étudié dans [ŠW01, section 2], voir également [KS10].

Exemple 2.5.18 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[H]$ l'algébroïde de Courant exact associé à $H \in \Omega^3(M)$ (voir théorème 2.3.7). Soit $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ et considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\pi^\sharp : T^\vee M \to TM$ comme dans l'exemple précédent. De manière similaire à l'exemple précédent, $\mathrm{Gr}(\pi^\sharp) \to M$ est un sous-fibré vectoriel lagrangien de $TM \oplus T^\vee M \to M$. Cependant, $\mathrm{Gr}(\pi^\sharp) \to M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}_M[H]$ intégrable si et seulement si le triplet (M,π,H) est une variété de Poisson tordue par H (voir l'exemple 1.2.6). En effet, la présence de H dans le crochet de $\mathcal{E}_M[H]$ implique que

$$\begin{aligned}&\Big\langle \big[\!\big[\pi^\sharp(\mathbf{d}f) \oplus \mathbf{d}f, \pi^\sharp(\mathbf{d}g) \oplus \mathbf{d}g\big]\!\big], \pi^\sharp(dh) \oplus \mathbf{d}h \Big\rangle \\ &\qquad = \big\{h, \{f,g\}\big\} + \big\{f, \{g,h\}\big\} - \big\{g, \{f,h\}\big\} + \boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}h)}\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}g)}\boldsymbol{\iota}_{\pi^\sharp(\mathbf{d}f)}H,\end{aligned}$$

donc en effectuant les permutations circulaires et en sommant on obtient

$$\begin{aligned}&\mathsf{Nij}\left(\pi^\sharp(\mathbf{d}f) \oplus \mathbf{d}f, \pi^\sharp(\mathbf{d}g) \oplus \mathbf{d}g, \pi^\sharp(\mathbf{d}h) \oplus \mathbf{d}h\right) \\ &\qquad = 3\Big(\big\{f, \{g,h\}\big\} + \big\{g, \{h,f\}\big\} + \big\{h, \{f,g\}\big\} - H(X_f, X_g, X_h)\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{Gr}(\pi^\sharp) \to M$ est intégrable si et seulement si le triplet (M,π,H) est une variété de Poisson tordue par H (voir l'exemple 1.2.6).

Exemple 2.5.19 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[0]$ l'algébroïde de Courant exact associé à la 3-forme nulle sur M (voir théorème 2.3.7) et soit $F \to M$ un sous-fibré vectoriel de $TM \to M$, autrement dit une distribution (au sens de la théorie des feuilletages). Le sous-fibré vectoriel $F \oplus \mathrm{Ann}(F) \to M$ de $TM \oplus T^\vee M \to M$ est lagrangien. L'involutivité de la distribution est équivalente à l'involutivité de $F \oplus \mathrm{Ann}(F) \to M$ pour le crochet de $\mathcal{E}$.

Pour l'exemple suivant on aura besoin de la notion d'algébroïde de Courant complexe, qui est en tout point similaire à celle d'algébroïde de Courant réel (définition 2.2.2), excepté que l'on utilise des fibrés vectoriels complexes et que l'ancre est à valeurs dans le fibré tangent complexifié $TM \otimes \mathbb{C} \to M$ au lieu de $TM \to M$.

Exemple 2.5.20 : Soit $\mathcal{E} = \big((TM \oplus T^\vee M) \otimes \mathbb{C} \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ l'algébroïde de Courant exact associé à la 3-forme nulle sur M (voir théorème 2.3.7) complexifié (l'ancre, le crochet et le produit scalaire sont identiques à ceux apparaissant dans le théorème 2.3.7 excepté que l'on travaille avec des sections complexes). Soit $J \in \mathrm{End}(TM)$ une structure presque complexe, c'est-à-dire un endomorphisme de $TM \to M$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Rappelons que l'on a $TM \otimes \mathbb{C} \cong T_{0,1}M \oplus T_{1,0}M$ où $T_{0,1}M \to M$ est le $-\mathrm{i}$-fibré vectoriel propre de $J \otimes \mathbb{C}$ et $T_{1,0}M \to M$ est le $+\mathrm{i}$-fibré vectoriel propre de $J \otimes \mathbb{C}$ (voir [Huy05, proposition 1.3.1]). On a $\mathrm{Ann}\, T_{0,1}M \cong T^\vee_{1,0}M$. Le sous-fibré vectoriel $T_{0,1}M \oplus T^\vee_{1,0}M \to M$ de $TM \otimes \mathbb{C} \to M$ est lagrangien.

On obtient ainsi une structure de Dirac sur $\mathcal{E}$ et l'intégrabilité de cette structure équivaut à l'intégrabilité de la structure presque complexe J en une structure complexe. En effet, supposons que le sous-fibré vectoriel $T_{0,1}M \oplus T^\vee_{1,0}M \to M$ est involutif. Ceci induit l'involutivité de la distribution complexe $T_{0,1}M \to M$ puis l'intégrabilité de J en une structure complexe (voir [Huy05, proposition 2.6.17]). Réciproquement supposons que J soit intégrable en une structure complexe, alors $\mathbf{d} = \partial + \bar{\partial}$. Soit deux sections $X \oplus \alpha, Y \oplus \beta$ de $T_{0,1}M \oplus T^\vee_{1,0}M \to M$. Alors

$$\begin{aligned}[X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] &= [X,Y] \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\alpha \\ &= [X,Y] \oplus \boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}\beta - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\alpha \\ &= [X,Y] \oplus \boldsymbol{\iota}_X \bar{\partial}\beta - \boldsymbol{\iota}_Y \bar{\partial}\alpha,\end{aligned}$$

ce qui est bien une section de $T_{0,1}M \oplus T^\vee_{1,0}M \to M$, on obtient par conséquent l'involutivité du sous-fibré vectoriel $T_{0,1}M \oplus T^\vee_{1,0}M \to M$.

On observe donc que la notion de structure de Dirac intégrable permet de synthétiser des questions « d'intégrabilité » de nature différente.

Exemple 2.5.21 : Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ un bigébroïde de Lie, avec $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$. On sait que $A \oplus B \to M$ peut être muni d'une structure d'algébroïde de Courant (voir l'exemple 2.3.13), le double du bigébroïde $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$. Alors les sous-fibrés vectoriels $A \to M$ et $B \to M$ de $A \oplus B \to M$ sont deux structures de Dirac intégrables du double de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$.

Le théorème suivant (apparu dans [LWX97, théorème 2.6]) suit une démarche inverse de celle de l'exemple précédent.

Théorème 2.5.22 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit $L_1 \to M$ et $L_2 \to M$ deux structures de Dirac de $\mathcal{E}$ intégrables et complémentaires orthogonales, c'est-à-dire $E = L_1 \perp L_2$. Alors $(L_1 \to M, L_2 \to M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un bigébroïde de Lie.

Ci-après nous redonnons deux exemples de structures de Dirac intégrables qui cette fois-ci s'appuient sur le théorème [LWX97, théorème 6.1] (voir aussi la référence originale [Cou90]).

Théorème 2.5.23 (théorème 6.1, [LWX97]) **:** Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$, où l'on notera $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$, un bigébroïde de Lie (définition 2.3.12). Soit $\Phi : A \to B \cong A^\vee$ un morphisme de fibrés vectoriels couvrant l'identité. Alors $\mathrm{Gr}(\Phi)$ est une structure de Dirac du double de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ (voir l'exemple 2.3.13) intégrable si et seulement si Φ est antisymétrique (pour le produit scalaire du double du bigébroïde de Lie) et satisfait l'*équation de Maurer-Cartan*

$$\mathrm{d}_A\widetilde{\Phi} + \frac{1}{2}\left[\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Phi}\right]_B = 0,$$

où $\widetilde{\Phi} \in \Omega^2(\mathcal{A})$ est défini par $\widetilde{\Phi}(u,v) = \Phi(u)(v)$ pour tous $u, v \in \Gamma(A)$. De manière analogue, le graphe d'un morphisme de fibrés vectoriels $\Psi : B \to A \cong B^\vee$ couvrant l'identité est une structure de Dirac intégrable si et seulement si Ψ est antisymétrique et satisfait l'équation

$$\mathrm{d}_B\widetilde{\Psi} + \frac{1}{2}\left[\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Psi}\right]_A = 0,$$

où $\widetilde{\Psi} \in \Omega^2(\mathcal{B})$ est défini par $\widetilde{\Psi}(u,v) = \Psi(u)(v)$ pour tous $u, v \in \Gamma(B)$.

Exemple 2.5.24 : Soit M une variété équipée de la structure de Poisson triviale (le bivecteur de Poisson est nul) et considérons le bigébroïde de Lie $\mathcal{E} = (\mathcal{T}_M, \mathcal{P}_M[\pi = 0])$ (voir l'exemple 2.3.16). Puisque la différentielle $\mathrm{d}_\pi = -[\pi,\cdot]_{\mathsf{SN}}$ (voir 1.4.17) du second algébroïde de Lie est nulle, on a d'après le théorème précédent que le graphe d'une application $\pi^\sharp : T^\vee M \to TM$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}$ intégrable si et seulement si $[\pi,\pi]_{\mathsf{SN}} = 0$ c'est-à-dire si (M,π), où $\pi(\alpha,\beta) = \pi^\sharp(\alpha)(\beta)$, est une variété de Poisson ; on retrouve l'exemple 2.5.17.

Exemple 2.5.25 : Soit M une variété équipée de la structure de Poisson triviale (le bivecteur de Poisson est nul) et considérons le bigébroïde de Lie $\mathcal{E} = (\mathcal{P}_M[\pi = 0], \mathcal{T}_M)$ (voir l'exemple 2.3.16). Puisque le crochet de Schouten-Nijenhuis sur le premier algébroïde est nul (ceci découle de (1.3)), on a d'après le théorème précédent que le graphe d'une application $\omega^\flat : TM \to T^\vee M$ est une structure de Dirac de $\mathcal{E}$, intégrable si et seulement si $\mathbf{d}\omega = 0$, où $\omega(X,Y) = \omega^\flat(X)(Y)$, c'est-à-dire si (M,ω) est une variété présymplectique ; on retrouve l'exemple 2.5.15.

La définition suivante est une version *relative* de la notion de structure de Dirac dans le cas où la base du sous-fibré vectoriel est une sous-variété de la base de l'algébroïde de Courant. Cette notion est apparue dans [AX07, définition 6.3] et est utile dans la description des morphismes entre algébroïdes de Courant, voir section 2.6.

Définition 2.5.26 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit N une sous-variété de M. Une *structure de Dirac* de $\mathcal{E}$ *à support* sur N est un sous-fibré vectoriel $L \to N$ de $E \to M$ lagrangien et tel que pour tout $u \in L$, on ait $\mathsf{a}(u) \in TN$. On dira qu'une telle structure de Dirac est *intégrable* si pour toutes sections $u, v \in \Gamma(E)$ telles que $u|_N, v|_N \in \Gamma(L)$, alors $[u,v]|_N \in \Gamma(L)$. Cette dernière propriété sera également appelée *involutivité* de $F \to N$.

Le lemme 2.5.5 et la proposition 2.5.10 se généralisent directement au cas de structures de Dirac de la définition précédente.

La proposition suivante généralise [LWX97, proposition 7.1], il s'agit en réalité du théorème [AX07, théorème 6.11] pour lequel nous donnons une preuve plus simple ne faisant pas intervenir la notion d'opérateur de Dirac générateur (voir remarque 2.2.11).

Proposition 2.5.27 : Soit $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}_A, [\cdot,\cdot]_A)$ et $\mathcal{B} = (B \to M, \mathsf{a}_B, [\cdot,\cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie tels que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ soit un bigébroïde de Lie (définition 2.3.12). Soit N une sous-variété de M et soit $F \to N$ un sous-fibré vectoriel de $A \to M$. Alors le sous-fibré vectoriel $L = F \oplus \mathrm{Ann}(F) \to N$ de $A \oplus B \to M$ est une structure de Dirac du double du bigébroïde de Lie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ à support sur N (la construction du double est explicitée dans 2.3.13), intégrable si et seulement si $F \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{A}$ et $\mathrm{Ann}(F) \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{B}$.

Preuve : Supposons que $L \to N$ soit une structure de Dirac de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ à support dans N intégrable. Montrons que $F \to N$ est un sous-algébroïde de $\mathcal{A}$ (définition 1.3.14). En vertu de l'expression de l'ancre a du double de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ (exemple 2.3.13), on a pour tout $u \in F$ que $\mathsf{a}_A(u) = \mathsf{a}(u) \in TN$ par hypothèse. Puis pour tous $u, v \in \Gamma(A)$ telles que $u|_N, v|_N \in \Gamma(F)$, on a $[u,v]_A|_N = [u,v]|_N \in \Gamma(L) \cap \Gamma(A)$ par hypothèse, donc $[u,v]_A|_N \in \Gamma(F)$. Un raisonnement similaire montre que $\mathrm{Ann}(F) \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{B}$.

Réciproquement supposons que $F \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{A}$ et $\mathrm{Ann}(F) \to N$ est un sous-algébroïde de Lie de $\mathcal{B}$. Tout d'abord $L \to N$ est lagrangien par définition. Soit $u \in F$ et $\alpha \in \mathrm{Ann}(F)$, alors $\mathsf{a}(u \oplus \alpha) = \mathsf{a}_A(u) + \mathsf{a}_B(\alpha) \in \Gamma(TN)$ par hypothèse. Enfin soit $u \oplus \alpha$ et $v \oplus \beta$ deux sections de $\Gamma(A \oplus B)$ telles que $u \oplus \alpha|_N, v \oplus \beta|_N \in \Gamma(L)$. D'après l'expression du crochet $[\cdot,\cdot]$ du double de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ on a

$$[u \oplus \alpha, v \oplus \beta] = [u,v]_A + \mathscr{L}^B_\alpha v - \iota^B_\beta \mathrm{d}_B u \oplus [\alpha,\beta]_B + \mathscr{L}^A_u \beta - \iota^A_v \mathrm{d}_A \alpha.$$

Montrons que $[u \oplus \alpha, v \oplus \beta]|_N \in \Gamma(L)$. Tout d'abord par hypothèse on a que $[u,v]_A|_N \in \Gamma(F)$ et $[\alpha,\beta]_B|_N \in \Gamma(\mathrm{Ann}\,F)$, il reste donc à étudier les autres termes. La composante sur A s'écrit

$$\mathscr{L}^B_\alpha v - \iota^B_\beta \mathrm{d}_B u = \iota^B_\alpha \mathrm{d}_B v + \mathrm{d}_B\big[\alpha(v)\big] - \iota^B_\beta \mathrm{d}_B u,$$

que l'on va à présent évaluer sur N. En notant (j, J) le morphisme l'inclusion d'algébroïdes de Lie

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "J"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ N \arrow[r, hook, "j"] & M \end{tikzcd},$$

on obtient
$$\mathrm{d}_B\big[\alpha(v)\big]\big|_N = (j,J)^\natural \mathrm{d}_B\big[\alpha(v)\big] = \mathrm{d}_B(j,J)^\natural\alpha(v) = 0,$$
puisque $\alpha(v)|_N = 0$. Les deux termes restants sont analogues, considérons par exemple le terme $\iota_\alpha^B \mathrm{d}_B v$. Soit $\gamma \in \Gamma(B)$ telle que $\gamma|_N \in \Gamma(\mathrm{Ann}\, F)$. Alors

$$(\mathrm{d}_B v)(\alpha,\gamma)|_N = \big[\mathsf{a}_B(\alpha)\cdot\gamma(v) - \mathsf{a}_B(\gamma)\cdot\alpha(v) - [\alpha,\gamma]_B(v)\big]\big|_N,$$

et on montre que chaque terme est nul par un raisonnement similaire à celui ci-dessus. Par conséquent $\iota_\alpha^B \mathrm{d}_B v \in \Gamma(F)$. La composante sur B se traite de manière analogue, on conclut donc que $L \to N$ est une structure de Dirac du double du bigébroïde de Lie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)$ à support sur N intégrable. □

Remarque 2.5.28 : La preuve peut être adaptée au cas des proto-bigébroïdes de Lie.

2.6 Morphismes d'algébroïdes de Courant

La définition suivante généralise directement la définition 1.3.1 des morphismes entre algébroïdes de Lie de même base.

Définition 2.6.1 : Considérons deux algébroïdes de Courant

$$\mathcal{E} = \big(E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E\big) \text{ et } \mathcal{F} = \big(F \to M, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F\big),$$

au-dessus de la *même* base M. Un *morphisme* entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, couvrant l'identité, est la donnée d'un morphisme Φ entre les fibrés vectoriels $E \to M$ et $F \to M$ qui commute aux ancres, aux produits scalaires et aux crochets au sens où

$$\mathsf{a}_E = \mathsf{a}_F \circ \Phi, \tag{2.38}$$
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_E = \langle\Phi\cdot,\Phi\cdot\rangle_F, \tag{2.39}$$

et pour tous $u, v \in \Gamma(E)$,

$$\Phi\big([u,v]_E\big) = \big[\Phi(u),\Phi(v)\big]_F. \tag{2.40}$$

Dans le cas où Φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels (respectivement automorphisme) on dira que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un *isomorphisme* d'algébroïdes de Courant (respectivement *automorphisme*).

Il est clair que la composée de deux morphismes d'algébroïdes de Couvrant couvrant l'identité est encore un morphisme d'algébroïdes de Courant couvrant l'identité, ce qui amène à la définition suivante.

Définition 2.6.2 : Soit M une variété. La catégorie $\textsf{\textbf{AlgdCourant}}(M)$ a pour objets les algébroïdes de Courant de base M et pour morphismes les morphismes entre algébroïdes de Courant de base M couvrant l'identité.

Proposition 2.6.3 : On a un foncteur d'oubli $\textsf{\textbf{AlgdCourant}}(M) \to \textsf{\textbf{AlgdLeibniz}}(M)$, qui oublie le produit scalaire.

Le défaut d'antisymétrie du crochet d'un algébroïde de Courant, introduit par le produit scalaire à travers l'opérateur D, peut être supprimé par un passage au quotient, ce qui est le contenu de la proposition suivante. Il est important de rappeler que, conformément à nos conventions, nous ne travaillons qu'avec des algébroïdes de Courant réguliers (l'ancre est de rang constant) et que par conséquent on peut considérer $\operatorname{Ker}\mathsf{a}$ en tant que fibré vectoriel (de rang constant).

Proposition 2.6.4 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant (régulier). Alors le fibré vectoriel quotient $E/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp} \to M$ est canoniquement muni d'une structure d'algébroïde de Lie ; on notera $\bar{\mathcal{E}}$ cet algébroïde de Lie et on l'appellera l'*algébroïde de Lie associé* à $\mathcal{E}$.

Preuve : D'après (2.15) $(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp}$ est $\mathcal{C}^{\infty}(M)$-engendré par $\operatorname{Im}\operatorname{Id}$ qui est un idéal bilatère pour la structure d'algèbre de Leibniz : pour $u = \mathsf{D}f \in \Gamma(\operatorname{Im}\mathsf{D})$ et $v \in \Gamma(E)$ on a $[u,v] = [\mathsf{D}f, v] = 0 \in \Gamma(\operatorname{Im}\mathsf{D})$ d'après (2.11) et pour $u \in \Gamma(E)$ et $v = \mathsf{D}f \in \Gamma(\operatorname{Im}\mathsf{D})$ on a $[u,v] = [u, \mathsf{D}f] = \mathsf{D}\langle \mathsf{D}f, u\rangle \in \Gamma(\operatorname{Im}\mathsf{D})$ d'après (2.12). D'après (2.14) l'ancre passe au quotient. On obtient alors une structure d'algèbre de Leibniz sur les modules de sections de $A = E/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp} \to M$ qui est *a fortiori* une structure d'algèbre de Lie le crochet étant à présent antisymétrique, munissant ainsi $A \to M$ d'une structure d'algébroïde de Lie. □

Remarque 2.6.5 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. Le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ne passe pas au quotient par $(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp}$. En effet on a

$$\langle u + \mathsf{D}f, v + \mathsf{D}g\rangle = \langle u, v\rangle + \mathsf{a}(v)\cdot f + \mathsf{a}(u)\cdot g.$$

pour tous $u, v \in \Gamma(E)$ et $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$. Voir également la proposition 3.1.2.

Exemple 2.6.6 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[H]$ l'algébroïde de Courant exact associé à $H \in \Omega^3(M)$ (exemple 2.35). Nous avons $\operatorname{Ker}\mathsf{a} = (\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp} = T^{\vee}M$. On en déduit que $\overline{\mathcal{E}_M[H]}$ est isomorphe à $\mathcal{T}_M$.

Proposition 2.6.7 : On a un foncteur $\mathbf{K} : \mathbf{AlgdCourant}(M) \to \mathbf{AlgdLie}(M)$ défini sur les objets par $\mathbf{K}(\mathcal{E}) = \bar{\mathcal{E}}$ et sur les morphismes $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ par $\mathbf{K}(\Phi) = \bar{\Phi}$ où le morphisme d'algébroïdes de Lie $\bar{\Phi} : \bar{\mathcal{E}} \to \bar{\mathcal{F}}$ est induit par Φ.

Preuve : Considérons deux algébroïdes de Courant $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ et $\mathcal{F} = (F \to M, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ et soit $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme au sens de la définition 2.6.1. Pour que Φ passe aux quotients, il est nécessaire et suffisant que

$$\Phi\big((\operatorname{Ker}\mathsf{a}_A)^{\perp}\big) \subset (\operatorname{Ker}\mathsf{a}_B)^{\perp},$$

ce qui équivaut d'après (2.14) à

$$\Phi\big(\operatorname{Im}\mathsf{D}_E\big) \subset \operatorname{Im}\mathsf{D}_F.$$

Soit $u, v \in \Gamma(E)$, alors d'après (2.7) et le fait que Φ commute aux crochets et aux produits scalaires

$$\begin{aligned}\Phi\big(\mathsf{D}_E\langle u,v\rangle_E\big) &= \Phi\big([u,v]_E+[v,u]_E\big)\\ &= \big[\Phi(u),\Phi(v)\big]_F+\big[\Phi(v),\Phi(u)\big]_F\\ &= \mathsf{D}_F\big\langle\Phi(u),\Phi(v)\big\rangle_F\\ &= \mathsf{D}_F\langle u,v\rangle_E.\end{aligned}$$

Or $\mathcal{C}^\infty(U)$, U étant un ouvert de M, est engendré par la produits $\langle u,v\rangle_E$ d'après (2.18), donc Φ passe aux quotients ; l'application quotient est notée $\bar\Phi$. Il faut à présent vérifier que $\bar\Phi$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie. Comme remarqué dans la preuve de la proposition 2.6.4, les ancres et les crochets passent au quotient, les relations (2.38) et (2.40) impliquent alors que $\bar\Phi$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie. □

Traitons à présent le cas de morphismes entre algébroïdes de Courant qui ne couvrent pas nécessairement l'identité. Nous allons donner deux définitions apparues dans [AX07, section 6.5]. La seconde est plus générale, en un certain sens, que la première. La première s'appuie sur le lemme suivant, qui fait intervenir l'isomorphisme de dualité fourni par un produit scalaire.

Lemme 2.6.8 : Soit $\pi_1 : E_1 \to M_1$ et $\pi_2 : E_2 \to M_2$ deux fibrés vectoriels équipés de produits scalaires. Soit $(\varphi,\Phi) : E_1 \to E_2$ un morphisme entre ces deux fibrés vectoriels. Alors, à toute section $u \in \Gamma(E_2)$ est associée une section $\hat u \in \Gamma(E_1)$ donnée par

$$\hat u = \big(\Upsilon_1^{-1}\circ(\Phi^!)^\vee\circ\varphi^!\Upsilon_2\big)(\varphi^! u),$$

où $\Upsilon_1 : E_1 \to E_1^\vee$ (respectivement $\Upsilon_2 : E_2 \to E_2^\vee$) désigne l'isomorphisme de fibrés vectoriels induit par le produit scalaire sur le fibré vectoriel $E_1 \to M_1$ (respectivement $E_2 \to M_2$). Cette section $\hat u \in \Gamma(E_1)$sera appelée *tiré en arrière* de $u \in \Gamma(E_2)$ par (φ,Φ).

Preuve : Commençons par rappeler la construction du fibré vectoriel tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} \varphi^! E_2 \arrow[r, "\varphi^!"] \arrow[d, "\pi_2^!"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \end{tikzcd}.$$

L'espace total est $\varphi^! E_2 = \{(x_1,e_2)\in M_1\times E_2 : \pi_2(e_2)=\varphi(x_1)\}$ et les applications $\pi_2^!$ et $\varphi^!$ sont les projections naturelles données par $\pi_2^!(x_1,e_2)=x_1$ et $\varphi^!(x_1,e_2)=e_2$. Alors $\pi_2^! : \varphi^! E_2 \to M_1$ est un fibré vectoriel (voir [Hus94, proposition 3.1, chapitre 3]). Étant donnée une section $u\in\Gamma(E_2)$ on a une section $\varphi^! u\in\Gamma(\varphi^! E_2)$ définie par $(\varphi^! u)_x = u_{\varphi(x)}$ pour tout $x\in M_1$ et appelée tiré en arrière de u. Le morphisme de fibrés vectoriels $\Phi : E_1 \to E_2$ se factorise au travers de $\varphi^! E_2$ en un morphisme de fibrés vectoriels $\Phi^!$:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi^!"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[rr, bend left, "\Phi"] & \varphi^! E_2 \arrow[r, "\varphi^!"] \arrow[d, "\pi_2^!"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, equal] & M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \end{tikzcd},$$

défini par $\Phi^!(x_1, e_1) = (x_1, \Phi(e_1))$ pour tous $x_1 \in M_1$ et $e_1 \in E_1|_{x_1}$ (voir [Hus94, proposition 5.5, chapitre 2]). Rappelons également (voir [Hus94, proposition 6.6, chapitre 2]) qu'étant donné un morphisme $\Psi : A \to B$ de fibrés vectoriels de base M couvrant l'identité et une application $g : N \to M$, on a un morphisme $g^!\Psi : g^!A \to g^!B$ de fibrés vectoriels de base N défini par $g^!\Psi(x, u) = (x, \Psi(u))$ pour tous $x \in N$ et $u \in A|_x$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $g^! : \mathbf{Vect}(M) \to \mathbf{Vect}(N)$, où $\mathbf{Vect}(X)$ désigne la catégorie des fibrés vectoriels sur une variété X (voir [Hus94, proposition 5.6, chapitre 2]). Reprenant les notations de l'énoncé, en notant $\Upsilon_2 : E_2 \to E_2^\vee$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels induit par le produit scalaire sur le fibré vectoriel $E_2 \to M_2$, on obtient un nouvel isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi^! E_2 \to \varphi^! E_2^\vee$. Considérons à présent le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_1^\vee & \varphi^! E_2^\vee \arrow[l, "(\Phi^!)^\vee"'] & E_2^\vee \arrow[l, "(\varphi^!)^\vee"'] \\
E_1 \arrow[u, leftarrow, "\Upsilon_1^{-1}"'] \arrow[r, "\Phi^!"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \varphi^! E_2 \arrow[u, "\varphi^!\Upsilon_2"] \arrow[r, "\varphi^!"] \arrow[d, "\pi_2^!"'] & E_2 \arrow[u, "\Upsilon_2"'] \arrow[d, "\pi_2"'] \\
M_1 \arrow[r, equal] & M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2
\end{tikzcd},$$

où $\Upsilon_1 : E_1 \to E_1^\vee$ est l'isomorphisme de fibrés vectoriels induit par le produit scalaire sur le fibré vectoriel $E_1 \to M_1$. Étant une donnée une section $u \in \Gamma(E_2)$ on pose

$$\hat{u} = \left(\Upsilon_1^{-1} \circ (\Phi^!)^\vee \circ \varphi^!\Upsilon_2\right)(\varphi^! u). \tag{2.41}$$

On vérifie alors que $\hat{u}$ est bien une section de $E_1 \to M_1$. □

Remarque 2.6.9 : Reprenons les notations du lemme précédent. Soit $u \in \Gamma(E_1)$ et soit $v \in \Gamma(E_2)$ telles que $u = \hat{v}$. La relation (2.41) s'écrit de manière abrégée selon

$$u_x = \left[(\Phi^!)^\vee\left(v^\flat_{\varphi(x)}\right)\right]^\sharp,$$

pour tout $x \in M_1$. Par conséquent $u = \hat{v}$ implique

$$\left\langle v_{\varphi(x)} - \Phi(u_x), \Phi(e)\right\rangle = 0,$$

pour tous $x \in M_1$ et $e \in E_1$, donc pour tout $x \in M_1$ on a

$$v_{\varphi(x)} - \Phi(u_x) \in (\operatorname{Im}\Phi)^\perp,$$

ce qui ne signifie pas nécessairement que $\varphi^! v = \Phi(u)$ puisque Φ n'est pas nécessairement surjective.

Définition 2.6.10 : Considérons deux algébroïdes de Courant

$$\mathcal{E} = \left(E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E\right) \text{ et } \mathcal{F} = \left(F \to N, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F\right).$$

Un *morphisme d'algébroïdes de Courant* $(\varphi, \Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ au *sens fort* est la donnée d'un morphisme de fibrés vectoriels $(\varphi, \Phi) : E \to F$ qui commute aux ancres, aux produits scalaires et aux crochets au sens où

$$\mathbf{d}\varphi \circ \mathsf{a}_E = \mathsf{a}_F \circ \Phi, \tag{2.42}$$

$$\langle u, v\rangle_E = \varphi^* \big\langle \Phi(u), \Phi(v)\big\rangle_F, \tag{2.43}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(E)$ et

$$\Phi\Big(\big[\hat{u}, \hat{v}\big]_E\Big) = \varphi^! [u, v]_F, \tag{2.44}$$

pour tous $u, v \in \Gamma(F)$. Dans (2.43), φ^* désigne l'opération tiré-en-arrière définie par $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Dans le cas où (φ, Φ) est un isomorphisme de fibrés vectoriels (respectivement automorphisme) on dira que $(\varphi, \Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un *isomorphisme fort* d'algébroïdes de Courant (respectivement *automorphisme fort*).

Remarque 2.6.11 : Reprenons les notations de la définition précédente. Dans le cas où les deux algébroïdes de Courant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ ont une base commune M, on a par orthogonalité de Φ que $\widehat{\Phi(u)} = u$ pour toute section u de $E \to M$ et la définition 2.6.10 est équivalente à la définition 2.6.1.

Remarque 2.6.12 : Reprenons les notations de la définition précédente. Dans le cas d'un isomorphisme fort d'algébroïdes de Courant $(\varphi, \Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, l'isomorphisme de fibrés vectoriels $(\varphi, \Phi) : E \to F$ induit une application au niveaux des modules de sections, encore notée Φ, et définie par $\Phi(u)_y = \Phi(u_{\varphi^{-1}(y)})$, pour tout $u \in \Gamma(E)$ et $y \in N$. Dans ce cas, la condition (2.44) est équivalente à la condition

$$\Phi\big([u, v]_E\big) = \big[\Phi(u), \Phi(v)\big]_F,$$

pour toutes sections $u, v \in \Gamma(E)$.

Définition 2.6.13 (définition 6.12, [AX07] et section 1.3, [LBM09]) **:** Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ et $\mathcal{F} = (F \to N, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ deux algébroïdes de Courant. Un *morphisme d'algébroïdes de Courant* $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{F}$ au *sens faible* est la donnée d'une application lisse $\varphi : M \to N$ et d'une structure de Dirac (φ, L) (voir 2.5.26) de l'algébroïde de Courant produit $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ (voir 2.4.1 et 2.2.6), à support sur $\mathrm{Gr}(\varphi)$ et intégrable. Dans le cas où φ est un automorphisme de M (c'est-à-dire un difféomorphisme lisse $\varphi : M \to M$) et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ on dira que $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ est un *automorphisme faible* de $\mathcal{E}$.

Lemme 2.6.14 : Soit M et N deux variétés et $f : M \to N$ une application lisse. Alors

$$T\,\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gr}(\mathbf{d}f) \subset TM \oplus TN.$$

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout $x \in M$ on a

$$T_{(x,f(x))}\,\mathrm{Gr}(f) = \mathrm{Gr}\left(\mathbf{d}f_x : T_xM \to T_{f(x)}N\right).$$

Soit donc $x \in M$ et $\gamma : I \to M$ un chemin dans M, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $\gamma(0) = x$. Alors $\Gamma(t) = \big(\gamma(t), f(\gamma(t))\big)$ est un chemin dans $\mathrm{Gr}(f)$ tel que $\Gamma(0) = (x, f(x))$. En dérivant par rapport à t il vient

$$\dot{\Gamma}(t) = \Big(\dot{\gamma}(t), \mathbf{d}f_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big),$$

par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} T_{(x,f(x))}\,\mathrm{Gr}(f) &= \{\dot\gamma(0) : \gamma : I \to M \text{ chemin dans } M \text{ tel que } \gamma(0) = x\} \\ &= \Big\{\big(v, \mathbf{d}_x f(v)\big) : v \in T_x M\Big\} \\ &= \mathrm{Gr}\left(\mathbf{d}f_x : T_x M \to T_{f(x)} N\right). \end{aligned}$$

□

Ci-après nous énonçons et donnons une preuve de [AX07, proposition 6.9] (qui ne figure pas dans la prépublication) avec une hypothèse supplémentaire.

Proposition 2.6.15 : Considérons deux algébroïdes de Courant

$$\mathcal{E} = \left(E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E\right) \text{ et } \mathcal{F} = \left(F \to M, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F\right),$$

Soit $(\varphi, \Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme d'algébroïdes de Courant au sens fort (définition 2.6.10) tel que $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ soit coisotrope pour le produit scalaire de $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Alors $(\varphi, \Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un morphisme d'algébroïdes de Courant au sens faible (définition 2.6.13).

Preuve : D'après le lemme 2.5.13 $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est un fibré vectoriel, qui est un sous-fibré vectoriel du produit cartésien $E \times F \to M \times N$. On va montrer que $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est une structure de Dirac de l'algébroïde de Courant produit $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ (voir la proposition 2.4.1) à support sur $\mathrm{Gr}(\varphi)$ et intégrable. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur le produit cartésien $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, d'après (2.43) on a pour tous $u, v \in E$

$$\Big\langle \big(u, \Phi(u)\big), \big(v, \Phi(v)\big) \Big\rangle\Big|_{(x,\varphi(x))} = -\langle u, v\rangle_E\Big|_x + \big\langle \Phi(u), \Phi(v)\big\rangle_F\Big|_{\varphi(x)} = 0,$$

ce qui signifie que $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est isotrope. Ce sous-fibré vectoriel est également coisotrope grâce à l'hypothèse de l'énoncé. Notons a l'ancre de $-\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Pour tout $u \in E$, on a d'après (2.42) que

$$\mathsf{a}\big(u, \Phi(u)\big) = \big(\mathsf{a}_E(u), \mathsf{a}_F \circ \Phi(u)\big) = \big(\mathsf{a}_E(u), \mathbf{d}\varphi \circ \mathsf{a}_E(u)\big),$$

ce qui est dans $T\,\mathrm{Gr}(\varphi)$ d'après le lemme 2.6.14 ; par conséquent on a $\mathsf{a}(\mathrm{Gr}\,\Phi) \subset T\,\mathrm{Gr}(\varphi)$. Intéressons-nous à présent à l'involutivité. D'après la section 2.4.1, il suffit de montrer l'involutivité sur des sections du produit cartésien de la forme $\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v$, avec $u \in \Gamma(E)$ et $v \in \Gamma(F)$. Considérons donc $\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v, \mathrm{pr}_M^!\, u' \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v' \in \Gamma(E \times F)$ telles que $\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v|_{\mathrm{Gr}(\varphi)}, \mathrm{pr}_M^!\, u' \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v'|_{\mathrm{Gr}(\varphi)} \in \Gamma(\mathrm{Gr}\,\Phi)$. Cela signifie, par exemple dans le cas de $\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v$, que

$$\left(\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v\right)_{(x,\varphi(x))} \in E_x \oplus F_{\varphi(x)},$$

et $v_{\varphi(x)} = \Phi(u_x)$, pour tout $x \in M$; c'est-à-dire $\Phi(u) = \varphi^! v$. Par conséquent d'après la remarque 2.6.9 on a $\hat v = u$. Par définition,

$$\left[\mathrm{pr}_M^!\, u \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v, \mathrm{pr}_M^!\, u' \oplus \mathrm{pr}_N^!\, v'\right] = \mathrm{pr}_M^![u, u']_E \oplus \mathrm{pr}_N^![v, v']_F,$$

et pour montrer que le membre de droite est dans $\Gamma(\mathrm{Gr}\,\Phi)$, il faut montrer que $\Phi\big([u,u']_E\big) = \varphi^![v,v']_F$. Or d'après (2.44) on a

$$\Phi\big([u,u']_E\big) = \Phi\big([\hat{v},\hat{v}']_E\big) = \varphi^![v,v']_F.$$

Finalement on obtient que $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est une structure de Dirac de $-\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ à support dans $\mathrm{Gr}(\varphi)$, intégrable. Ainsi $(\varphi, \mathrm{Gr}\,\Phi) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme faible d'algébroïdes de Courant. $\square$

Exemple 2.6.16 : Soit $\mathcal{E}$ un algébroïde de Courant, dont on notera $E \to M$ le fibré vectoriel sous-jacent. Le morphisme fort $(\mathrm{Id}_M, \mathrm{Id}_E) : E \to E$ admet pour graphe la diagonale $E\times E \to M\times M$ qui est une structure de Dirac intégrable de $-\mathcal{E}\times\mathcal{E}$. On notera $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ le morphisme faible associé, que l'on appellera *morphisme identité* de $\mathcal{E}$.

Exemple 2.6.17 : Soit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie quadratiques que l'on considère comme des algébroïdes de Courant au-dessus d'un point (exemple 2.3.1). Un morphisme d'algèbres de Lie quadratiques $\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ est un morphisme d'algébroïdes de Courant au sens fort. Une sous-algèbre lagrangienne et stable pour le crochet de $-\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ est un morphisme d'algébroïdes de Courant au sens faible.

La souplesse apportée par la notion de morphisme faible prend toute son essence avec les exemples qui vont suivre. En effet la plupart des exemples d'algébroïdes de Courant proviennent de bigébroïdes de Lie ou de proto-bigébroïdes de Lie, entre lesquels on ne peut souvent pas construire de morphisme de fibrés vectoriels à cause d'une « double variance » naturellement présente dans ces exemples.

Le premier exemple est énoncé dans [AX07, proposition 6.12] ; on note que la preuve ne fait pas appel à [AX07, proposition 6.8] (cette proposition faisant intervenir la notion d'opérateur de Dirac générateur).

Définition 2.6.18 : Soit M et N deux variétés et $\varphi : M \to N$ une application lisse. On dira que deux champs de vecteurs $X\in\Gamma(TM)$ et $Y\in\Gamma(TN)$ sont *φ-compatibles* si $\varphi_*(X) = \varphi^!Y$, où $\varphi_* = \mathbf{d}\varphi^! : \Gamma(TM)\to\Gamma(\varphi^*TN)$. On notera φ^* l'application duale $\varphi_*^\vee : \Gamma(\varphi^*T^\vee N) \to \Gamma(T^\vee M)$ (souvent en géométrie différentielle on confond abusivement les applications $\mathbf{d}\varphi$ et $\mathbf{d}\varphi^!$).

Lemme 2.6.19 : Soit M et N deux variétés et $\varphi : M\to N$ une application lisse. Soit $X\in\Gamma(TM)$ et $Y\in\Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs φ-compatibles. Alors pour tout $\omega\in\Omega^\bullet(N)$ on a

$$\boldsymbol{\iota}_X(\varphi^*\omega) = \varphi^*\boldsymbol{\iota}_Y\omega, \quad \boldsymbol{\mathscr{L}}_X(\varphi^*\omega) = \varphi^*\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y\omega.$$

Preuve : Soit $\omega\in\Omega^k(N)$ et soit $X_1,\dots,X_{k-1}\in\Gamma(TM)$. Alors

$$\begin{aligned}\big[\boldsymbol{\iota}_X(\varphi^*\omega)\big](X_1,\dots,X_k) &= (\varphi^*\omega)(X,X_1,\dots,X_{k-1})\\ &= \omega(\varphi_*X,\varphi_*X_1,\dots,\varphi_*X_{k-1})\\ &= (\boldsymbol{\iota}_Y\omega)(\varphi_*X_1,\dots,\varphi_*X_{k-1})\\ &= \big[\varphi^*(\boldsymbol{\iota}_Y\omega)\big](X_1,\dots,X_{k-1}).\end{aligned}$$

La seconde formule résulte d'une application de la première ainsi que de la formule « magique » de Cartan ([Lee13, théorème 14.35]) et du fait que le tiré-en-arrière φ^* commute avec la différentielle de De Rham $\mathbf{d}$ (voir [Lee13, proposition 11.25]) :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X(\varphi^*\omega) &= \boldsymbol{\iota}_X\mathbf{d}\varphi^*\omega + \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_X\varphi^*\omega\\ &= \boldsymbol{\iota}_X\varphi^*\mathbf{d}\omega + \mathbf{d}\varphi^*\boldsymbol{\iota}_Y\omega\\ &= \varphi^*\boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\omega + \varphi^*\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y\omega\\ &= \varphi^*\mathscr{L}_Y\omega.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.20 : Soit M et N deux variétés et $\varphi : M \to N$ une application lisse. Soit $\mathcal{E}_M[H_M] = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ (respectivement $\mathcal{E}_N[H_N] = (F \to N, \mathsf{a}_F, [\cdot,\cdot]_F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$) l'algébroïde de Courant exact sur M (respectivement N) associé à H_M (respectivement associé à H_N) (voir exemple 2.35). Considérons $L \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ le sous-fibré vectoriel de $E \times F \to M \times N$ défini par

$$L = \big\{(v \oplus \varphi^*\xi, \varphi_*v \oplus \xi) : (v,\xi) \in T_xM \times T_y^\vee N \text{ pour tout } (x,y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)\big\}.$$

Alors (φ, L) est une structure de Dirac de $-\mathcal{E}_M[H_M] \times \mathcal{E}_N[H_N]$, et (φ, L) est intégrable si et seulement si $\varphi^*H_N = H_M$. Ainsi $(\varphi, L) : \mathcal{E}_M[H_M] \dashrightarrow \mathcal{E}_M(H_N)$ est un morphisme faible si et seulement si $\varphi^*H_N = H_M$.

Preuve : Montrons que (φ, L) est une structure de Dirac de $-\mathcal{E}_M[H_M] \times \mathcal{E}_N[H_N]$ à support sur $\mathrm{Gr}(\varphi)$. Tout d'abord $L \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ est isotrope puisque par définition du produit scalaire sur le produit cartésien,

$$\begin{aligned}&\big\langle(v \oplus \varphi^*\xi, \varphi_*v \oplus \xi),(w \oplus \varphi^*\eta, \varphi_*w \oplus \eta)\big\rangle\\ &\qquad = -\big\langle v \oplus \varphi^*\xi, w \oplus \varphi^*\eta\big\rangle_E + \big\langle \varphi_*v \oplus \xi, \varphi_*w \oplus \eta\big\rangle_F\\ &\qquad = -(\varphi^*\xi)(w) - (\varphi^*\eta)(v) + \xi(\varphi_*w) + \eta(\varphi_*v),\end{aligned}$$

ce qui est nul par définition de φ^* en tant qu'application duale de φ_*. Montrons à présent la coisotropie. Soit $(u \oplus \xi, v \oplus \eta) \in L^\perp$ donc en particulier on a

$$\big\langle(u \oplus \xi, v \oplus \eta), (w \oplus 0, \varphi_*w \oplus 0)\big\rangle = -\xi(w) + \varphi^*\eta(w) = 0,$$

d'où $\xi = \varphi^*\eta$, et également

$$\big\langle(u \oplus \xi, v \oplus \eta), (0 \oplus \varphi^*\zeta, 0 \oplus \zeta)\big\rangle = -\zeta(\varphi_*u) + \zeta(v) = 0,$$

d'où $v = \varphi_*u$; ainsi $(u \oplus \xi, v \oplus \eta) = (u \oplus \varphi^*\eta, \varphi_*u \oplus \eta) \in L$. Concernant la compatibilité avec l'ancre on a pour tout $(v \oplus \varphi^*\xi, \varphi_*v \oplus \xi) \in \Gamma(L)$

$$\begin{aligned}\mathsf{a}\big((v \oplus \varphi^*\xi, \varphi_*v \oplus \xi)\big) &= \mathsf{a}_E(v \oplus \varphi^*\xi) \oplus \mathsf{a}_F(\varphi_*v \oplus \xi)\\ &= v \oplus \varphi_*v \in T\,\mathrm{Gr}(\varphi).\end{aligned}$$

Terminons par l'involutivité. D'après la construction du produit cartésien (voir section 2.4.1) il suffit de montrer cette propriété pour les expressions de la forme $\mathrm{pr}_M^!(X \oplus \alpha) \oplus$

$\mathrm{pr}_N^!(Y \oplus \beta) \in \Gamma(E \times F)$ pour $X \oplus \alpha \in \Gamma(E)$ et $Y \oplus \beta \in \Gamma(F)$. Considérons donc $\mathrm{pr}_M^!(X \oplus \alpha) \oplus \mathrm{pr}_N^!(Y \oplus \beta)$ et $\mathrm{pr}_M^!(X' \oplus \alpha') \oplus \mathrm{pr}_N^!(Y' \oplus \beta')$ telles qu'après restriction à $\mathrm{Gr}(\varphi)$ on obtienne des sections de $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$. Cela signifie, par exemple pour $\mathrm{pr}_M^!(X \oplus \alpha) \oplus \mathrm{pr}_N^!(Y \oplus \beta)$, que $\alpha = \varphi^*\beta$ et $\varphi^! Y = \varphi_* X$. Par définition du crochet sur le produit cartésien on a

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{pr}_M^!(X \oplus \alpha) \oplus & \mathrm{pr}_N^!(Y \oplus \beta), \mathrm{pr}_M^!(X' \oplus \alpha') \oplus \mathrm{pr}_N^!(Y' \oplus \beta')\big] \\ &= \mathrm{pr}_M^! \left[X \oplus \alpha, X' \oplus \alpha'\right]_E \oplus \mathrm{pr}_N^! \left[Y \oplus \beta, Y' \oplus \beta'\right]_F \\ &= \mathrm{pr}_M^! \left\{[X, X']_{TM} \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \alpha' - \boldsymbol{\iota}_{X'} \mathbf{d}\alpha + \boldsymbol{\iota}_{X'} \boldsymbol{\iota}_X H_M\right\} \\ &\quad \oplus \mathrm{pr}_N^! \left\{[Y, Y']_{TN} \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y \beta' - \boldsymbol{\iota}_{Y'} \mathbf{d}\beta + \boldsymbol{\iota}_{Y'} \boldsymbol{\iota}_Y H_N\right\}.\end{aligned}$$

Pour montrer qu'après restriction à $\mathrm{Gr}(\varphi)$ on obtient un élément de $\Gamma(\mathrm{Gr}\,\Phi)$, on doit montrer que

$$\begin{aligned}\left[Y, Y'\right]_{TN} &= \varphi_* \left[X, X'\right]_{TM}, \\ \varphi^*\big(\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y \beta' - \boldsymbol{\iota}_{Y'} \mathbf{d}\beta\big) &= \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \alpha' - \boldsymbol{\iota}_{X'} \mathbf{d}\alpha, \\ \varphi^*\big(\boldsymbol{\iota}_{Y'} \boldsymbol{\iota}_Y H_N\big) &= \boldsymbol{\iota}_{X'} \boldsymbol{\iota}_X H_M.\end{aligned}$$

La première identité vient du fait que X et Y d'une part, X' et Y' d'autre part, sont φ-compatibles et donc par naturalité du crochet de Lie $[X, X']$ et $[Y, Y']$ sont φ-compatibles ([Lee13, proposition 8.30]). La seconde identité découle de l'application du lemme précédent et du fait que $\alpha = \varphi^*\beta$ et $\alpha' = \varphi^*\beta'$. Enfin d'après le lemme précédent, la troisième identité est vérifiée si et seulement si $\varphi^* H_N = H_M$. □

La proposition suivante est énoncée dans [AX07, corollaire 6.11] et s'appuie sur [AX07, théorème 6.10] ; nous proposons une preuve directe, plus élémentaire.

Proposition 2.6.21 : Soit (M, π) et (N, ϖ) deux variétés de Poisson et soit $\varphi : M \to N$ une application lisse Poisson (voir [Vai94, définition 1.17] ou [LGPV13, définition 1.18 et proposition 1.19]). Considérons les bigébroïdes de Lie (voir l'exemple 2.3.16) $\big(\mathcal{P}_M[\pi], \mathcal{T}_M\big)$ et $\big(\mathcal{P}_N[\varpi], \mathcal{T}_N\big)$ ainsi que $L \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ le sous-fibré vectoriel de $E \times F \to M \times N$, avec $E = T^\vee M \oplus TM$ et $F = T^\vee N \oplus TN$, défini par

$$L = \left\{(\varphi^*\xi \oplus v, \xi \oplus \varphi_* v) : (\xi, v) \in T_y^\vee N \times T_x M \text{ pour tout } (x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)\right\}.$$

Alors (φ, L) est un morphisme faible entre les doubles (voir exemple 2.3.13) des bigébroïdes de Lie $\big(\mathcal{P}_M[\pi], \mathcal{T}_M\big)$ et $\big(\mathcal{P}_N[\varpi], \mathcal{T}_N\big)$.

Preuve : L'isotropie et la coisotropie de $L \to \mathrm{Gr}(\varphi)$ se montrent de manière similaire à ce qui est fait dans la proposition précédente. Notons $\pi^\sharp : T^\vee M \to TM$ l'application $\alpha \in T_x^\vee M \mapsto \pi(\alpha, \cdot) \in T_x M$ et similairement pour ϖ. Concernant la compatibilité avec l'ancre, on a, par définition de l'ancre sur le produit cartésien,

$$\begin{aligned}\mathsf{a}\big((\varphi^*\xi \oplus v, \xi \oplus \varphi_* v)\big) &= \mathsf{a}_E(\varphi^*\xi \oplus v) \oplus \mathsf{a}_F(\xi \oplus \varphi_* v) \\ &= \big(\pi^\sharp(\varphi^*\xi) + v\big) \oplus \big(\varpi^\sharp(\xi) + \varphi_* v\big)\end{aligned}$$

or, d'après [LGPV13, proposition 1.19] il vient pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$

$$\varphi_*\left[\pi^\sharp(\varphi^*\xi)\right] \cdot g = \pi^\sharp(\varphi^*\xi) \cdot (g \circ \varphi) = \pi(\varphi^*\xi, \varphi^*\mathbf{d}g) = \left[\Lambda^2 \varphi_* \pi\right]^\sharp(\xi) \cdot g = \varpi^\sharp(\xi) \cdot g.$$

On en déduit que $\mathsf{a}\big((\varphi^*\xi \oplus v, \xi \oplus \varphi_* v)\big) \in T\,\mathrm{Gr}(\varphi)$. Il reste à montrer l'involutivité. D'après la construction du produit cartésien (voir section 2.4.1) il suffit de montrer cette propriété pour les expressions de la forme $\mathrm{pr}_M^!(\alpha \oplus X) \oplus \mathrm{pr}_N^!(\beta \oplus Y) \in \Gamma(E \times F)$ pour $\alpha \oplus X \in \Gamma(E)$ et $\beta \oplus Y \in \Gamma(F)$. Considérons donc $\mathrm{pr}_M^!(\alpha \oplus X) \oplus \mathrm{pr}_N^!(\beta \oplus Y)$ et $\mathrm{pr}_M^!(\alpha' \oplus X') \oplus \mathrm{pr}_N^!(\beta' \oplus Y')$ telles qu'après restriction à $\mathrm{Gr}(\varphi)$ on obtienne des sections de $\mathrm{Gr}(\Phi) \to \mathrm{Gr}(\varphi)$. Cela signifie, par exemple pour $\mathrm{pr}_M^!(\alpha \oplus X) \oplus \mathrm{pr}_N^!(\beta \oplus Y)$, que $\alpha = \varphi^*\beta$ et $\varphi^! Y = \varphi_* X$. Par définition du crochet sur le produit cartésien on a

$$\begin{aligned}
\big[\mathrm{pr}_M^!(\alpha \oplus X)&\oplus\mathrm{pr}_N^!(\beta \oplus Y), \mathrm{pr}_M^!(\alpha' \oplus X') \oplus \mathrm{pr}_N^!(\beta' \oplus Y')\big] \\
&= \mathrm{pr}_M^! \left[\alpha \oplus X, \alpha' \oplus X'\right]_E \oplus \mathrm{pr}_N^! \left[\beta \oplus Y, \beta' \oplus Y'\right]_F \\
&= \mathrm{pr}_M^! \Big\{\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha)}\alpha' - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha')}\alpha - \mathbf{d}\big\{\pi(\alpha,\alpha')\big\} + \boldsymbol{\mathscr{L}}_X\alpha' - \boldsymbol{\iota}_{X'}\mathbf{d}\alpha \\
&\qquad\qquad \oplus \left[X, X'\right]_{TM} - [\pi, \alpha(X')]_{\mathsf{SN}} - \iota_\alpha[\pi, X']_{\mathsf{SN}} + \iota_{\alpha'}[\pi, X]_{\mathsf{SN}}\Big\} \\
&\quad \oplus \mathrm{pr}_N^! \Big\{\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varpi^\sharp(\beta)}\beta' - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varpi^\sharp(\beta')}\beta - \mathbf{d}\big\{\varpi(\beta,\beta')\big\} + \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y\beta' - \boldsymbol{\iota}_{Y'}\mathbf{d}\beta \\
&\qquad\qquad \oplus \left[Y, Y'\right]_{TN} - [\varpi, \beta(Y')]_{\mathsf{SN}} - \iota_\beta[\varpi, Y']_{\mathsf{SN}} + \boldsymbol{\iota}_{\beta'}[\pi, X]_{\mathsf{SN}}\Big\},
\end{aligned}$$

et pour montrer qu'il s'agit d'une section de $L \to \mathrm{Gr}(\varphi)$, on doit montrer que

$$\begin{aligned}
\varphi^*&\Big\{\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varpi^\sharp(\beta)}\beta' - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varpi^\sharp(\beta')}\beta - \mathbf{d}\big\{\varpi(\beta,\beta')\big\} + \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y\beta' - \boldsymbol{\iota}_{Y'}\mathbf{d}\beta\Big\} \\
&\qquad = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha)}\alpha' - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha')}\alpha - \mathbf{d}\big\{\pi(\alpha,\alpha')\big\} + \boldsymbol{\mathscr{L}}_X\alpha' - \boldsymbol{\iota}_{X'}\mathbf{d}\alpha, \\
[Y&, Y']_{TN} - [\varpi, \beta(Y')]_{\mathsf{SN}} - \iota_\beta[\varpi, Y']_{\mathsf{SN}} + \boldsymbol{\iota}_{\beta'}[\pi, X]_{\mathsf{SN}} \\
&\qquad = \varphi_*\Big\{[X, X']_{TM} - [\pi, \alpha(X')]_{\mathsf{SN}} - \iota_\alpha[X, X']_{\mathsf{SN}} + \iota_{\alpha'}[\pi, X]_{\mathsf{SN}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.6.19 et [LGPV13, proposition 1.19], on a

$$\varphi^*\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varpi^\sharp(\beta)}\beta' = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varphi_*\pi^\sharp(\beta)}(\varphi^*\beta') = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\varphi^*\beta)}(\varphi^*\beta') = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\pi^\sharp(\alpha)}\alpha',$$

et d'après le fait que φ est Poisson, on a également que

$$\varphi^*\mathbf{d}\big\{\varpi(\beta,\beta')\big\} = \mathbf{d}\big\{\varphi_*\pi(\beta,\beta')\big\} = \mathbf{d}\big\{\pi(\alpha,\alpha')\big\}.$$

Enfin, d'après le lemme 2.6.19 et une extension de [Lee13, proposition 8.30] à $[\cdot,\cdot]_{\mathsf{SN}}$, on obtient

$$\varphi_*\iota_\alpha[\pi, X']_{\mathsf{SN}} = \iota_\beta\varphi_*[\pi, X']_{\mathsf{SN}} = \iota_\beta[\varphi_*\pi, \varphi_*X']_{\mathsf{SN}} = \iota_\beta[\varpi, Y']_{\mathsf{SN}},$$

et finalement

$$\varphi_*[\pi, \alpha(X')]_{\mathsf{SN}} = [\varpi, \varphi_*\iota_\alpha X']_{\mathsf{SN}} = [\varpi, \iota_\beta Y']_{\mathsf{SN}},$$

ce qui permet d'obtenir l'égalité cherchée (les autres égalités intermédiaires étant obtenues de manière similaire à la proposition précédente). $\square$

La composition de morphismes faibles entre algébroïdes de Courant exige des hypothèses techniques supplémentaires que nous décrivons maintenant brièvement.

Définition 2.6.22 : Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois algébroïdes de Courant. Soit $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{F}$ et $(\varphi', L') : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes faibles. On pose

$$\begin{aligned} L' \circ L &= \big\{(u, w) \in E \times G : \exists v \in F \; (u, v) \in L \text{ et } (v, w) \in L'\big\} \\ &= \mathrm{pr}_{E\times G} \Big\{(L \times L') \cap \big(E \times \Delta(F) \times G\big)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

où E (respectivement F, G) désigne l'espace total du fibré vectoriel sous-jacent à $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$) et Δ est l'application diagonale $v \mapsto (v, v)$.

Reprenons les notations de la définition ci-dessus. Afin que le sous-ensemble $L' \circ L$ de $E \times G$ définisse un sous-fibré vectoriel (c'est-à-dire qu'il existe un choix continu d'éléments $v \in F$ satisfaisant les conditions $(u, v) \in L$ et $(v, w) \in L'$), il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires, qui sont énoncées de manière générale dans [LBM14, section 1.4 et annexe A] avec de nombreux détails. Une des conditions utilisées dans [LBM14] est que l'intersection (2.45) soit *propre au sens de Bott*, c'est-à-dire définit une variété lisse et l'intersection des espaces tangents est l'espace tangent de l'intersection (voir [Hör07, annexe C.3]). On dira que l'intersection (2.45) est *propre* si elle est propre au sens de Bott et que la projection $L \times L' \to E \times G$ est lisse et de rang constant.

Proposition 2.6.23 : [LBM14, proposition 1.4] Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois algébroïdes de Courant. Soit $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{F}$ et $(\varphi', L') : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes faibles, tels que l'intersection (2.45) soit *propre* au sens ci-dessus. Alors $(\varphi' \circ \varphi, L' \circ L)$ est un morphisme faible de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{G}$.

La proposition suivante montre qu'un automorphisme faible (voir définition 2.6.13), provenant du graphe d'un morphisme de fibrés vectoriels surjectif est un automorphisme fort (voir définition 2.6.10) ; et réciproquement.

Proposition 2.6.24 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. Soit $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ un automorphisme faible de $\mathcal{E}$, où L est le graphe d'un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $(\varphi, \Phi) : E \to E$. Alors (φ, Φ) est un automorphisme fort de $\mathcal{E}$. Réciproquement, étant donné (φ, Φ) un automorphisme fort de $\mathcal{E}$ dont le graphe est coisotrope, $(\varphi, \operatorname{Gr}\Phi) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ est un automorphisme faible de $\mathcal{E}$.

Preuve : Soit $(\varphi, L) : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ avec L le graphe de $(\varphi, \Phi) : E \to E$. Alors par isotropie de L on obtient que Φ est un isométrie de $(E \to M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donc Φ est injective puisque le produit scalaire est non dégénéré. Par conséquent Φ est un automorphisme de $E \to M$ préservant le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Enfin l'involutivité de L assure que Φ préserve le crochet $[\cdot,\cdot]$, par conséquent (φ, Φ) est un automorphisme fort de $\mathcal{E}$. La réciproque est assurée par la proposition 2.6.15. □

Remarque 2.6.25 : *A priori* la notion d'automorphisme faible d'un algébroïde de Courant est plus générale que celle d'automorphisme fort puisqu'elle ne nécessite pas que la structure de Dirac de la définition 2.6.13 provienne du graphe d'un morphisme de fibrés vectoriels. Comme on l'a vu dans les exemples 2.6.20 et 2.6.21, dans le cas de morphismes entre algébroïdes de Courant, cette généralité est indispensable pour tenir compte de la « double variance » inhérente à la structure de ces exemples. En revanche, dans le cas des automorphismes d'un algébroïde de Courant, se limiter au cas où la structure de Dirac de la définition provient du graphe d'un morphisme de fibrés vectoriels n'est *a priori* pas restrictif. Par exemple considérons l'automorphisme faible $(\varphi, L) : \mathcal{E}_M[H] \dashrightarrow \mathcal{E}_M[H]$ issu de l'exemple 2.6.20 (on a donc que φ est un difféomorphisme de M tel que $\varphi^* H = H$). Puisque φ est un automorphisme de la variété M, on peut récrire L comme $\mathrm{Gr}(\Phi)$, où l'automorphisme de fibrés vectoriels $\Phi : TM \oplus T^\vee M \to TM \oplus T^\vee M$ est défini par $\Phi(X \oplus \xi) = \mathbf{d}\varphi(X) \oplus (\mathbf{d}\varphi^{-1})^\vee(\xi)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^\vee M)$. On constate donc que, bien qu'issu initialement d'un morphisme faible, l'automorphisme faible $(\varphi, L) : \mathcal{E}_M[H] \dashrightarrow \mathcal{E}_M[H]$ provient d'un graphe, celui de Φ, et d'après la proposition précédente, cet automorphisme faible provient d'un automorphisme fort. De plus, la composition de morphismes faibles ne peut s'effectuer que si l'intersection (2.45) est propre au sens de Bott. Ce sont les raisons pour lesquelles au chapitre 3 nous ne considèrerons que des automorphismes de type fort d'un algébroïde de Courant (régulier).

Définition 2.6.26 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un algébroïde de Courant et soit $F \to N$ un sous-fibré vectoriel de $E \to M$, N étant une sous-variété de M. On dira que le sous-fibré vectoriel $F \to N$ est un sous-algébroïde de Courant de $\mathcal{A}$ si

- pour tout $u \in F$, $\mathsf{a}(u) \in TN$,
- pour toutes sections $u, v \in \Gamma(E)$ telles que $u|_N, v|_N \in \Gamma(F)$, alors $[u,v]|_N \in \Gamma(F)$,
- la restriction de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ à $F \to N$ est encore non-dégénérée.

Dans la définition ci-dessus, on équipe $F \to N$ de l'ancre a de $\mathcal{E}$ restreinte à $F \to N$, du crochet $[\cdot,\cdot]$ de $\mathcal{E}$ restreint à $\Gamma(F)$ et du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ de $\mathcal{E}$ restreint à $F \to N$; muni de cette ancre et de ce crochet $F \to N$ est un algébroïde de Courant et

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ N \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

est un morphisme faible d'algébroïdes de Courant, la structure de Dirac sous-jacente étant donnée par la diagonale de $F \to M$. L'inclusion $F \hookrightarrow E$ est un morphisme fort d'algébroïdes de Courant, dont le graphe est coisotrope et donne le morphisme faible précédent.

2.7 Cohomologie naïve d'un algébroïde de Courant

Dans toute cette section on fixe $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un algébroïde de Courant régulier, ce qui permet de considérer le noyau $\operatorname{Ker} \mathsf{a} \to M$ en tant que fibré vectoriel de rang constant.

Dans la littérature, il existe plusieurs notions de cohomologie pour l'algébroïde de Courant $\mathcal{E}$. Tout d'abord, la *cohomologie naïve* de $\mathcal{E}$, définie dans [SX08] et [CSX13], qui est en réalité isomorphe à la cohomologie de l'algébroïde de Lie $\overline{\mathcal{E}}$ (proposition 2.6.4 et le théorème 2.7.14) à travers duquel on a pu supprimer les défauts d'antisymétrie du crochet $[\cdot,\cdot]$. Il est également possible de considérer la cohomologie de l'algébroïde de Leibniz sous-jacent, il s'agit de la cohomologie de Loday-Pirashvili [Lod93, section

6.1] du $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-module $\Gamma(E)$ des sections de $E \to M$, qui est une algèbre de Leibniz, à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Cette cohomologie, contrairement à la première, prend en compte le défaut d'antisymétrie du crochet $[\cdot,\cdot]$ (voir [GKP13] pour une approche utilisant la géométrie graduée). En toute généralité, $\Gamma(E)$ est une algèbre de Courant-Dorfman [Roy09, définition 2.1] et on doit utiliser la cohomologie associée définie par Roytenberg [Roy09, section 4], qui de plus prend en compte la nature des anomalies de symétrie (elles sont contrôlées par l'opérateur D). On pourrait également interpréter $\mathcal{E}$ en tant que dg-variété symplectique de degré 2 et prendre pour cohomologie celle associée au champ de vecteur cohomologique $\{\Theta,\cdot\}$ (voir [Roy02a]), appelée *cohomologie standard*, où $\{\cdot,\cdot\}$ désigne ici un crochet de Poisson gradué. Dans la suite nous définirons et ne travaillerons qu'avec la cohomologie naïve de l'algébroïde de Courant $\mathcal{E}$.

Le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $E \to M$ s'étend en un produit scalaire sur $\Lambda^\bullet E \to M$ défini par

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\rangle = \delta_{mn} \det\left[\langle u_i, v_j\rangle\right]_{1\leq i,j\leq m,n},$$

pour tous $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n \in \Gamma(E)$. Aussi $\Lambda^\bullet\Upsilon : \Lambda^\bullet E \to \Lambda^\bullet E^\vee$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels et on a un crochet de dualité défini par

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \,|\, u_1 \wedge \cdots \wedge u_n\rangle = \delta_{mn} \det\left[\alpha_i(u_j)\right]_{1\leq i,j\leq m,n},$$

pour tous $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \Gamma(E^\vee)$ et $u_1,\ldots,u_n \in \Gamma(E)$, et relié au produit scalaire par $\Lambda^\bullet\Upsilon$ de la même manière qu'auparavant.

Le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module qui va jouer le rôle de k-cochaines est défini par

$$\Omega^k(\mathcal{E}) = \Gamma\left(\Lambda^k \operatorname{Ker} \mathsf{a}\right).$$

On notera $\Omega^\bullet(\mathcal{E}) = \bigoplus_{k\geq 0} \Omega^k(\mathcal{E})$ l'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée commutative formée par les cochaines pour le produit extérieur. Ces cochaines permettent d'obtenir des opérateurs similaires au triplet de Cartan des algébroïdes de Lie ; on verra plus loin que la cohomologie naïve est isomorphe à la cohomologie de l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ (théorème 2.7.14, où $\bar{\mathcal{E}}$ est décrit dans la proposition 2.6.4).

Définition 2.7.1 : Pour $u \in \Gamma(E)$ on définit un *produit intérieur* (couramment appelé opérateur d'insertion), $\breve{\imath}_u : \Omega^k(\mathcal{E}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{E})$ par

$$\langle \breve{\imath}_u\alpha, v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-1}\rangle = \langle \alpha, u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-1}\rangle,$$

pour tous $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{E})$ et $v_1,\ldots,v_{k-1} \in \Gamma(E)$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on pose $\breve{\imath}_u f = 0$, pour tout $u \in \Gamma(E)$.

Lemme 2.7.2 : Soit $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ une k-cochaine décomposable, et soit $u \in \Gamma(E)$. Alors

$$\breve{\imath}_u\alpha = \breve{\imath}_u(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\langle \alpha_i, u\rangle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

En particulier $\breve{\imath}_u v = \langle u, v\rangle$ pour tous $u, v \in \Gamma(E)$.

Preuve : On a successivement

$$
\begin{aligned}
\langle \breve{\iota}_u \alpha, v_1 \wedge \dots \wedge v_{k-1} \rangle &= \langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, u \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{k-1} \rangle \\
&= \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, u \rangle & \langle \alpha_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, v_{k-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_k, u \rangle & \langle \alpha_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_k, v_{k-1} \rangle \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \langle \alpha_i, u \rangle \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, v_{k-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{i-1}, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_{i-1}, v_{k-1} \rangle \\ \langle \alpha_{i+1}, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_{i+1}, v_{k-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_k, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_k, v_{k-1} \rangle \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \langle \alpha_i, u \rangle \langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \alpha_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_{k-1} \rangle .
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tous $v_1, \dots, v_{k-1} \in \Gamma(E)$ on obtient le résultat. □

Proposition 2.7.3 : Soit $u \in \Gamma(E)$. Alors $\breve{\iota}_u$ est une dérivation de degré -1 de l'algèbre $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$, c'est-à-dire $\breve{\iota}_u : \Omega^k(\mathcal{E}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{E})$ satisfait la relation

$$
\breve{\iota}_u(\alpha \wedge \beta) = \breve{\iota}_u \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \breve{\iota}_u \beta,
$$

pour tous $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{E})$ et $\beta \in \Omega^q(\mathcal{E})$.

Preuve : En utilisant la formule donnée dans la proposition précédente, cette proposition est claire pour des cochaines décomposables. On conclut dans le cas général par $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité de l'opérateur $\breve{\iota}_u$. □

La formule pour le produit intérieur permet de décrire les cochaines à l'aide du produit intérieur comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.7.4 : On a $\Omega^k(\mathcal{E}) = \left\{ \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E) \ : \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) \ \ \breve{\iota}_{\mathsf{D}f} \alpha = 0 \right\}$.

Preuve : Soit $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Omega^k(\mathcal{E})$ une k-cochaine décomposable. D'après la formule précédente pour $\breve{\iota}_{\mathsf{D}f}\alpha$, on est amené à évaluer les quantités $\langle \alpha_i, \mathsf{D}f \rangle$ qui valent d'après (2.8)

$$
\langle \alpha_i, \mathsf{D}f \rangle = \mathsf{a}(\alpha_i) \cdot f = 0.
$$

Réciproquement soit $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Gamma(\Lambda^k E)$ tel que $\breve{\iota}_{\mathsf{D}f}\alpha = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Alors d'après la formule précédente, $\langle \alpha_i, \mathsf{D}f \rangle = 0$ pour tout i, et donc par (2.8) on obtient que $\alpha_i \in \operatorname{Ker} \mathsf{a}$ puis que $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{E})$. □

Définition 2.7.5 : Pour $u \in \Gamma(E)$ on définit la *dérivée de Lie*, $\breve{\mathscr{L}}_u : \Omega^k(\mathcal{E}) \to \Omega^k(\mathcal{E})$ par

$$
\left\langle \breve{\mathscr{L}}_u \alpha, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \right\rangle = \mathsf{a}(u) \cdot \langle \alpha, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, v_1 \wedge \dots \wedge [u, v_i] \wedge \dots v_k \rangle,
$$

pour tous $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{E})$ et $v_1, \ldots, v_k \in \Gamma(E)$. Sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on pose $\breve{\mathscr{L}}_u f = \mathsf{a}(u) \cdot f$, pour tout $u \in \Gamma(E)$.

En particulier on montre facilement en utilisant (2.5) que $\breve{\mathscr{L}}_u v = [u, v]$ pour tous $u \in \Gamma(E)$ and $v \in \Gamma(\operatorname{Ker} \mathsf{a})$.

Proposition 2.7.6 : La dérivée de Lie $\breve{\mathscr{L}}_u$ satisfait les propriétés

$$\breve{\imath}_{[u,v]} = \breve{\mathscr{L}}_u \circ \breve{\imath}_v - \breve{\imath}_v \circ \breve{\mathscr{L}}_u,$$
$$\breve{\mathscr{L}}_u(\alpha \wedge \beta) = \breve{\mathscr{L}}_u \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \breve{\mathscr{L}}_u \beta,$$

pour tous $u, v \in \Gamma(E)$, $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{E})$.

La seconde propriété signifie que pour tout $u \in \Gamma(E)$, $\breve{\mathscr{L}}_u$ est dérivation de degré 0 de l'algèbre $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$. La première propriété peut donc se reformuler par $\breve{\imath}_{[u,v]} = \left[\breve{\mathscr{L}}_u, \breve{\imath}_v\right]$ pour le crochet $\mathbb{Z}$-gradué des dérivations sur $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$.

Preuve : On montre d'abord la première propriété. D'après la définition de la dérivée de Lie et du produit intérieur on a d'une part

$$\begin{aligned} \left\langle \breve{\mathscr{L}}_u \breve{\imath}_v \alpha, w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle &= \mathsf{a}(u) \cdot \langle \alpha, v \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \rangle \\ &\quad - \sum_{i=2}^{k} \left\langle \alpha, v \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge [u, w_i] \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle, \end{aligned} \tag{2.46}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left\langle \breve{\imath}_v \breve{\mathscr{L}}_u \alpha, w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle &= \mathsf{a}(u) \cdot \langle \alpha, w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \left\langle \alpha, w_1 \wedge \cdots \wedge [u, w_i] \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle, \end{aligned} \tag{2.47}$$

en notant w_1 pour v. En soustrayant (2.47) à (2.46) on obtient

$$\left\langle \alpha, [u, v] \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle = \left\langle \breve{\imath}_{[u,v]} \alpha, w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right\rangle.$$

On utilise à présent cette propriété pour montrer la seconde par récurrence sur $p+q$, p étant le degré de α et q le degré de β. Pour $p, q = 0$, c'est clair, puisque $\mathsf{a}(u)$ est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$, donc la propriété est vraie pour $p + q = 0$. Supposons la propriété vraie pour p et q tels que $p + q \leq r$ et montrons qu'elle est encore vraie au rang suivant c'est-à-dire pour $p + q = r + 1$. Soit $v \in \Gamma(E)$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned} \breve{\imath}_v \breve{\mathscr{L}}_u(\alpha \wedge \beta) &= \breve{\mathscr{L}}_u \breve{\imath}_v(\alpha \wedge \beta) - \breve{\imath}_{[u,v]}(\alpha \wedge \beta) \\ &= \breve{\mathscr{L}}_u \left(\breve{\imath}_v \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \breve{\imath}_v \beta\right) \\ &\qquad - \breve{\imath}_{[u,v]} \alpha \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge \breve{\imath}_{[u,v]} \beta. \end{aligned}$$

Puis en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\breve{\imath}_v\breve{\mathscr{L}}_u(\alpha\wedge\beta) &= \breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_v\alpha\wedge\beta+\breve{\imath}_v\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\beta+(-1)^p\breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\breve{\imath}_v\beta\\ &\qquad+(-1)^p\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_V\beta-\breve{\imath}_{[u,v]}\alpha\wedge\beta-(-1)^p\alpha\wedge\breve{\imath}_{[u,v]}\beta\\ &= \breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_v\alpha\wedge\beta+\breve{\imath}_v\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\beta+(-1)^p\breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\breve{\imath}_v\beta+(-1)^p\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_V\beta\\ &\qquad-\breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_v\alpha\wedge\beta+\breve{\imath}_v\breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\beta-(-1)^p\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\breve{\imath}_v\beta+(-1)^p\alpha\wedge\breve{\imath}_v\breve{\mathscr{L}}_u\beta\\ &= \breve{\imath}_v(\breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\beta)+\breve{\imath}_v(\alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\beta).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $v\in\Gamma(E)$, on obtient le résultat. □

Définition 2.7.7 : On définit la *dérivée extérieure* $\breve{\mathrm{d}}:\Omega^k(\mathcal{E})\to\Omega^{k+1}(\mathcal{E})$ par

$$\begin{aligned}\left\langle\breve{\mathrm{d}}\alpha,u_0\wedge\cdots\wedge u_k\right\rangle &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\mathsf{a}(u_i)\cdot\langle\alpha,u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge u_k\rangle\\ &\quad+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\big\langle\alpha,[u_i,u_j]\wedge u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{u_j}\wedge\cdots\wedge u_k\big\rangle,\end{aligned}$$

pour tous $\alpha\in\Omega^k(\mathcal{E})$ et $u_0,\dots,u_k\in\Gamma(E)$. Sur les fonctions $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ on pose

$$\left\langle\breve{\mathrm{d}}f,u\right\rangle=\langle\mathsf{D}f,u\rangle=\mathsf{a}(u)\cdot f,$$

pour tout $u\in\Gamma(E)$.

Proposition 2.7.8 : Pour tout $u\in\Gamma(E)$ on a, une formule magique de Cartan

$$\breve{\mathscr{L}}_u=\breve{\imath}_u\circ\breve{\mathrm{d}}+\breve{\mathrm{d}}\circ\breve{\imath}_u.$$

L'opérateur $\breve{\mathrm{d}}$ est une dérivation de degré 1 et de carré nul de l'algèbre $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$, c'est-à-dire

$$\breve{\mathrm{d}}(\alpha\wedge\beta)=\breve{\mathrm{d}}\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge\breve{\mathrm{d}}\beta,$$

pour tous $\alpha\in\Omega^p(\mathcal{E})$ et $\beta\in\Omega^q(\mathcal{E})$, et $\breve{\mathrm{d}}^2=0$.

On peut donc reformuler la première propriété par $\breve{\mathscr{L}}_u=\left[\breve{\imath}_u,\breve{\mathrm{d}}\right]$ pour le crochet $\mathbb{Z}$-gradué des dérivations.

Preuve : Pour α une k-cochaîne, on a, en notant u_0 pour u,

$$\begin{aligned}\left\langle\breve{\imath}_u\breve{\mathrm{d}}\alpha,u_1\wedge\cdots\wedge u_k\right\rangle &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\mathsf{a}(u_i)\cdot\langle\alpha,u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge u_k\rangle\\ &\quad+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\big\langle\alpha,[u_i,u_j]\wedge u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{u_j}\wedge\cdots\wedge u_k\big\rangle.\end{aligned}\tag{2.48}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\left\langle\breve{\mathrm{d}}\breve{\imath}_u\alpha,u_1\wedge\cdots\wedge u_k\right\rangle &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mathsf{a}(u_i)\cdot\langle\alpha,u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge u_k\rangle\\ &\quad+\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j+1}\big\langle\alpha,[u_i,u_j]\wedge u_0\wedge\cdots\wedge\widehat{u_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{u_j}\wedge\cdots\wedge u_k\big\rangle.\end{aligned}\tag{2.49}$$

En additionnant (2.48) et (2.49) on obtient

$$\mathsf{a}(u_0)\cdot\langle\alpha, u_1\wedge\cdots\wedge u_k\rangle - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\big\langle\alpha, [u_0,u_j]\wedge u_1\wedge\cdots\wedge\widehat{u_j}\wedge\cdots\wedge u_k\big\rangle,$$

ce qui n'est rien d'autre que

$$\left\langle\breve{\mathscr{L}}_u\alpha, u_1\wedge\cdots\wedge u_k\right\rangle,$$

après avoir décalé le facteur $[u_0,u_j]$ sur la droite.

Montrons à présent que $\breve{\mathrm{d}}$ est une dérivation par récurrence sur $p+q$, p étant le degré de α et q le degré de β. Pour $p,q=0$, c'est clair, puisque D est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$, donc la propriété est vraie pour $p+q=0$. Supposons la propriété vraie pour p et q tels que $p+q\leq r$ et montrons qu'elle est encore vraie au rang suivant c'est-à-dire pour $p+q=r+1$. Soit $u\in\Gamma(E)$ quelconque. D'après la formule magique de Cartan on a

$$\begin{aligned}\breve{\imath}_u\breve{\mathrm{d}}(\alpha\wedge\beta) &= \breve{\mathscr{L}}_u(\alpha\wedge\beta) - \breve{\mathrm{d}}\breve{\imath}_u(\alpha\wedge\beta)\\ &= \breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\beta\\ &\qquad - \breve{\mathrm{d}}\left(\breve{\imath}_u\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\breve{\imath}_u\beta\right).\end{aligned}$$

On peut à présent appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$\begin{aligned}\breve{\imath}_u\breve{\mathrm{d}}(\alpha\wedge\beta) &= \breve{\mathscr{L}}_u\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\breve{\mathscr{L}}_u\beta - \breve{\mathrm{d}}\breve{\imath}_u\alpha\wedge\beta\\ &\qquad - (-1)^{p-1}\breve{\imath}_u\alpha\wedge\breve{\mathrm{d}}\beta - (-1)^p\breve{\mathrm{d}}\alpha\wedge\breve{\imath}_u\beta - \alpha\wedge\breve{\mathrm{d}}\breve{\imath}_u\beta\\ &= \breve{\imath}_u\breve{\mathrm{d}}\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\breve{\imath}_u\breve{\mathrm{d}}\beta\\ &\qquad - (-1)^{p-1}\breve{\imath}_u\alpha\wedge\breve{\mathrm{d}}\beta - (-1)^p\breve{\mathrm{d}}\alpha\wedge\breve{\imath}_u\beta\\ &= \breve{\imath}_u(\breve{\mathrm{d}}\alpha\wedge\beta) + (-1)^p\breve{\imath}_u(\alpha\wedge\breve{\mathrm{d}}\beta).\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $u\in\Gamma(E)$, on obtient le résultat.

Montrons à présent que $\breve{\mathrm{d}}$ est de carré nul. Pour cela, il suffit de le prouver sur les 0-cochaines et les 1-cochaines puis d'utiliser la propriété de dérivation. Sur les 0-cochaines $\alpha\in\mathcal{C}^\infty(M)$, il vient d'après (2.13)

$$\begin{aligned}\left\langle\breve{\mathrm{d}}^2\alpha, u\wedge v\right\rangle &= \mathsf{a}(u)\cdot\left\langle\breve{\mathrm{d}}\alpha, v\right\rangle - \mathsf{a}(v)\cdot\left\langle\breve{\mathrm{d}}\alpha, u\right\rangle - \left\langle\breve{\mathrm{d}}\alpha, [u,v]\right\rangle\\ &= \mathsf{a}(u)\cdot\mathsf{a}(v)\cdot\alpha - \mathsf{a}(v)\cdot\mathsf{a}(u)\cdot\alpha - \mathsf{a}\big([u,v]\big)\cdot\alpha\\ &= 0.\end{aligned}$$

Pour les 1-cochaines, il vient d'après l'identité (2.1)

$$\begin{aligned}
\left\langle \breve{\mathrm{d}}^2\alpha, u\wedge v\wedge w\right\rangle &= \mathsf{a}(u)\cdot\left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, v\wedge w\right\rangle - \mathsf{a}(v)\cdot\left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, u\wedge w\right\rangle + \mathsf{a}(w)\cdot\left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, u\wedge v\right\rangle\\
&\qquad - \left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, [u,v]\wedge w\right\rangle + \left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, [u,w]\wedge v\right\rangle - \left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha, [v,w]\wedge u\right\rangle\\
&= \mathsf{a}(u)\cdot\mathsf{a}(v)\cdot\langle\alpha, w\rangle - \mathsf{a}(u)\cdot\mathsf{a}(w)\cdot\langle\alpha, v\rangle - \mathsf{a}(u)\cdot\big\langle\alpha, [v,w]\big\rangle\\
&\qquad - \mathsf{a}(v)\cdot\mathsf{a}(u)\cdot\langle\alpha, w\rangle + \mathsf{a}(v)\cdot\mathsf{a}(w)\cdot\langle\alpha, u\rangle + \mathsf{a}(v)\cdot\big\langle\alpha, [u,w]\big\rangle\\
&\qquad + \mathsf{a}(w)\cdot\mathsf{a}(u)\cdot\langle\alpha, v\rangle - \mathsf{a}(w)\cdot\mathsf{a}(v)\cdot\langle\alpha, u\rangle - \mathsf{a}(w)\cdot\big\langle\alpha, [u,v]\big\rangle\\
&\qquad - \mathsf{a}([u,v])\cdot\langle\alpha, w\rangle + \mathsf{a}(w)\cdot\big\langle\alpha, [u,v]\big\rangle + \Big\langle\alpha, \big[[u,v],w\big]\Big\rangle\\
&\qquad + \mathsf{a}([u,w])\cdot\langle\alpha, v\rangle + \mathsf{a}(v)\cdot\big\langle\alpha, [u,w]\big\rangle + \Big\langle\alpha, \big[[u,w],v\big]\Big\rangle\\
&\qquad + \mathsf{a}([v,w])\cdot\langle\alpha, u\rangle + \mathsf{a}(u)\cdot\big\langle\alpha, [v,w]\big\rangle + \Big\langle\alpha, \big[[v,w],\alpha\big]\Big\rangle\\
&= \Big\langle\alpha, \big[[u,v],w\big]\Big\rangle - \Big\langle\alpha, \big[[u,w],v\big]\Big\rangle + \Big\langle\alpha, \big[[v,w],u\big]\Big\rangle\\
&= \Big\langle\alpha, \mathsf{D}\big\langle v, [u,w]\big\rangle - \mathsf{D}\big\langle u, [v,w]\big\rangle\Big\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puis on utilise une récurrence sur le degré k des cochaînes. Supposons que $\breve{\mathrm{d}}^2\alpha = 0$ pour toute k-cochaîne α. Alors toute $(k+1)$-cochaîne β s'écrit comme combinaison $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire de $\beta\wedge\gamma$ avec β une k-cochaîne et γ une 1-cochaîne. On a donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\breve{\mathrm{d}}^2\alpha &= \breve{\mathrm{d}}^2(\beta\wedge\gamma)\\
&= \breve{\mathrm{d}}\left(\breve{\mathrm{d}}\beta\wedge\gamma + (-1)^k\beta\wedge\breve{\mathrm{d}}\gamma\right)\\
&= \breve{\mathrm{d}}^2\beta\wedge\gamma + (-1)^{k+1}\breve{\mathrm{d}}\beta\wedge\breve{\mathrm{d}}\gamma + (-1)^k\breve{\mathrm{d}}\beta\wedge\breve{\mathrm{d}}\gamma + \beta\wedge\breve{\mathrm{d}}^2\gamma\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Définition 2.7.9 : La différentielle $\breve{\mathrm{d}}$ sur l'algèbre $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$ est appelée *différentielle naïve* de $\mathcal{E}$.

On est à présent en mesure de définir la cohomologie naïve d'un algébroïde de Courant.

Définition 2.7.10 : Soit $\mathcal{E} = (E\to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant (régulier). Alors sa *cohomologie naïve* $\breve{H}^\bullet(\mathcal{E})$ est l'homologie de l'algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée commutative $\left(\Omega^\bullet(\mathcal{E}), \breve{\mathrm{d}}\right)$, définie par

$$\breve{H}^k(\mathcal{E}) = \frac{\operatorname{Ker}\left\{\breve{\mathrm{d}} : \Omega^k(\mathcal{E})\to\Omega^{k+1}(\mathcal{E})\right\}}{\operatorname{Im}\left\{\breve{\mathrm{d}} : \Omega^{k-1}(\mathcal{E})\to\Omega^k(\mathcal{E})\right\}}.$$

Remarque 2.7.11 : Du fait que $\breve{\mathrm{d}}$ est une dérivation de $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$ on remarque qu'en plus de l'addition, le produit extérieur passe à la cohomologie pour donner une structure multiplicative sur les classes. Ainsi $\breve{H}^\bullet(\mathcal{E})$ est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée commutative pour le produit extérieur.

Exemple 2.7.12 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique, considérée comme un algébroïde de Courant au-dessus d'un point (voir l'exemple 2.3.1). Alors $\Omega^\bullet(\mathfrak{g}) = \Lambda^\bullet\mathfrak{g} \cong \Lambda^\bullet\mathfrak{g}^\vee$, où l'isomorphisme est induit par le produit scalaire. En tant qu'algébroïde de Courant, la cohomologie naïve de $\mathfrak{g}$ est sa cohomologie de Chevalley-Eilenberg à coefficients dans le $\mathfrak{g}$-module trivial (voir [CE48, section 23]).

Exemple 2.7.13 : Soit M une variété et soit $\mathcal{E}_M[H]$ l'algébroïde de Courant exact sur M associé à $H \in \Omega^3(M)$ (voir l'exemple 2.35). Alors $\operatorname{Ker}\mathsf{a} = T^\vee M \to M$ et les k-cochaines sont donc les k-formes différentielles $\Omega^k(M)$. La différentielle naïve est la différentielle de De Rham $\mathbf{d}$ et la cohomologie naïve de $\mathcal{E}_M[H]$ est la cohomologie de De Rham de M (voir [Lee13, chapitre 13]). En particulier, cette cohomologie ne dépend pas de la classe de cohomologie $[H] \in \mathbf{H}^3(M)$.

Le théorème suivant a été élaboré à partir de [CSX13, Remarque 1.5].

Théorème 2.7.14 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant. Alors on a un isomorphisme d'algèbres $\mathbb{Z}$-gradués

$$\breve{H}^\bullet(\mathcal{E}) \cong H^\bullet(\bar{\mathcal{E}}),$$

avec à droite la cohomologie de l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$ (voir section 1.4 et la proposition 2.6.4).

Preuve : Considérons la projection $\pi : E \to A = E/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp$; $A \to M$ étant le fibré vectoriel sous-jacent à l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$. La projection π est naturellement surjective et son application duale $\pi^\vee : A^\vee \to E^\vee$ est injective. D'après [Gre75, chapitre 2, section 5, proposition 3] on a

$$\operatorname{Im}(\pi^\vee) \cong \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker}\pi) \cong \operatorname{Ann}\left[(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp\right] \cong \Upsilon\left((\operatorname{Ker}\mathsf{a})^{\perp\perp}\right) \cong \Upsilon(\operatorname{Ker}\mathsf{a}).$$

Par conséquent $\operatorname{Ker}\mathsf{a} \cong (\Upsilon^{-1}\circ\pi^\vee)(A^\vee)$ et $\Psi^\bullet = \Lambda^\bullet(\Upsilon^{-1}\circ\pi^\vee)$ fournit un isomorphisme d'algèbres $\mathbb{Z}$-graduées entre $\Omega^\bullet(\mathcal{E})$ et $\Gamma(\Lambda^\bullet A^\vee) = \Omega^\bullet(\bar{\mathcal{E}})$. De plus on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(\mathcal{E}) \arrow[r, "\breve{\mathrm{d}}"] & \Omega^{k+1}(\mathcal{E}) \\ \Omega^k(\bar{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\bar{\mathrm{d}}"] \arrow[u, "\Psi^k"] & \Omega^{k+1}(\bar{\mathcal{E}}) \arrow[u, "\Psi^{k+1}"'] \end{tikzcd},$$

où $\bar{\mathrm{d}}$ désigne la différentielle de l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ (voir définition 1.4.4). En effet pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Gamma(\Lambda^0 A^\vee)$, on a pour tout $u \in \Gamma(E)$

$$\left\langle \breve{\mathrm{d}}\Psi^0 f, u\right\rangle = \langle \mathsf{D}f, u\rangle = \mathsf{a}(u)\cdot f = (\bar{\mathrm{d}}f)(u) = \left\langle (\bar{\mathrm{d}}f)^\sharp, u\right\rangle = \left\langle \Psi^1\bar{\mathrm{d}}f, u\right\rangle,$$

et pour tout $\alpha \in \Gamma(\Lambda^1 A^\vee)$ et tous $u, v \in \Gamma(E)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \breve{\mathrm{d}}\Psi^1\alpha, u \wedge v \right\rangle = \left\langle \breve{\mathrm{d}}\alpha^\sharp, u \wedge v \right\rangle &= u \cdot \langle \alpha^\sharp, v \rangle - v \cdot \langle \alpha^\sharp, u \rangle - \langle \alpha^\sharp, [u, v] \rangle \\ &= (\bar{\mathrm{d}}\alpha)(u, v) = \langle (\bar{\mathrm{d}}\alpha)^\sharp, u \wedge v \rangle = \left\langle \Psi^2 \bar{\mathrm{d}}\alpha, u \wedge v \right\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit la relation de commutation générale en utilisant la propriété de dérivation des différentielles en jeu. Ainsi l'application $\Psi^\bullet$ est un isomorphisme de complexes et on en déduit le résultat. $\square$

Chapitre 3

Automorphismes forts d'algébroïdes de Courant réguliers

Dans ce chapitre nous commençons par détailler la notion de dissection introduite dans [CSX13], qui permet de généraliser au cas des algébroïdes de Courant *réguliers* les résultats obtenus sur la structure des algébroïdes de Courant exacts. Nous nous servons de cette notion pour étudier le groupe des automorphismes forts d'un algébroïde de Courant régulier, relativement à une dissection, ainsi qu'une version infinitésimale de ce groupe. On verra apparaître un nouveau type de symétrie, appelée *champ* A dans la littérature en Physique théorique, et qui est amené à jouer un rôle dans cette discipline, notamment en théorie des cordes et supergravité (voir par exemple [CMTW14, section 3.2] et [GF14, section 3]).

3.1 Dissections d'algébroïdes de Courant réguliers

Fixons $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier (voir définition 2.2.4). Pour commencer, écrivons la suite exacte courte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \mathsf{a} \hookrightarrow E \xrightarrow{\mathsf{a}} F = \operatorname{Im} \mathsf{a} \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Similairement au cas des algébroïdes de Courant exacts, on peut scinder cette suite avec un scindement isotrope (c'est-à-dire d'image isotrope dans $E \to M$). Tout d'abord, soit $\lambda_0 : F \to E$ un scindement de (3.1) et considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\phi : F \to F^\vee$ défini par

$$\big\langle \phi(X) \big| Y \big\rangle = \big\langle \lambda_0(X), \lambda_0(Y) \big\rangle.$$

Alors $\lambda = \lambda_0 - \frac{1}{2}(\mathsf{a}^\vee \circ \phi)^\sharp$ est un scindement isotrope de (3.1) d'après (2.17) et le fait que $\mathsf{a} \circ \lambda_0 = \mathrm{Id}_F$. Étant fixé un tel scindement isotrope $\lambda : F \to E$, nous sommes donc amenés à considérer la suite exacte courte de fibrés vectoriels suivante :

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp \cong F^\vee \hookrightarrow \operatorname{Ker} \mathsf{a} \xrightarrow{\pi} Q = (\operatorname{Ker} \mathsf{a})/(\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

l'inclusion étant donnée par (2.14) et l'isomorphisme de gauche étant donné par $\Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}^\vee$ puisque d'après [Gre75, chapitre 2, section 5, proposition 3] on a

$$\operatorname{Im}(\Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}^\vee) = \Upsilon^{-1} \operatorname{Im}(\mathsf{a}^\vee) \cong \Upsilon^{-1}(\operatorname{Ann} \operatorname{Ker} \mathsf{a}) \cong (\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\vee.$$

On peut toujours scinder la suite exacte courte (3.2) par un scindement σ tel que $\sigma(Q)$ soit orthogonal à $\lambda(F)$ dans E. Tout d'abord, soit $\sigma_0 : Q \to \operatorname{Ker} \mathsf{a}$ un scindement quelconque de (3.2) et considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\psi : Q \to F^\vee$ défini par

$$\big\langle \psi(\bar{a}) \big| X \big\rangle = \big\langle \sigma_0(\bar{a}), \lambda(X) \big\rangle.$$

Alors $\sigma = \sigma_0 - (\mathsf{a}^\vee \circ \psi)^\sharp$ est un scindement de (3.2) qui possède la propriété mentionnée ci-dessus : $\langle \sigma(\bar{a}), \lambda(X) \rangle = 0$ pour tous $\bar{a} \in Q$ et $X \in F$, toujours en utilisant (2.17) et le fait que $\mathsf{a} \circ \lambda_0 = \operatorname{Id}_F$ mais aussi que $\mathsf{a} \circ \sigma_0 = 0$. Pour montrer que σ est bien un scindement, on utilisera

$$\big\langle (\mathsf{a}^\vee \circ \psi(\bar{a}))^\sharp, \mathsf{D} f \big\rangle = \langle \bar{a}, \mathsf{a} \circ \mathsf{D} f \rangle = 0,$$

donc $\operatorname{Im}(\mathsf{a}^\vee \circ \psi)^\sharp \subset (\operatorname{Ker} \mathsf{a})^\perp$ puis $\pi \circ (\mathsf{a}^\vee \circ \psi)^\sharp = 0$.

On résume cette construction à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
& F^\vee \arrow[d, hook] & & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \mathsf{a} \arrow[r, hook] \arrow[d, bend left, "\pi"] & E \arrow[r, bend left, "\mathsf{a}"] & F \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\lambda"] & 0 \\
& Q \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[d] & & & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Le couple de scindements $(\lambda : F \to E, \sigma : Q \to \operatorname{Ker} \mathsf{a})$ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\Delta : \begin{cases} F^\vee \oplus Q \oplus F \longrightarrow E \\ \alpha \oplus \bar{a} \oplus X \longmapsto \mathsf{a}^\vee(\alpha)^\sharp + \sigma(\bar{a}) + \lambda(X) \end{cases} . \tag{3.4}$$

Ces constructions sont apparues pour la première fois dans [CSX13, lemme 1.2] et sont analogues à l'utilisation d'un scindement dans le cas des algébroïdes de Courant exacts (voir définition 2.35).

Proposition 3.1.1 : L'algébroïde de Courant régulier $\mathcal{E}$ induit naturellement un feuilletage de M (voir [Lee13, chapitre 19]) noté $\mathcal{F}$, et par conséquent, un algébroïde de Lie, encore noté $\mathcal{F}$ (voir l'exemple 1.2.11).

Preuve : D'après la relation (2.13), le fibré vectoriel $F = \operatorname{Im} \mathsf{a} \to M$ est une distribution involutive de $TM \to M$. Par conséquent, d'après le théorème de Frobenius global ([Lee13, théorème 19.21]), on obtient un feuilletage $\mathcal{F}$ de M. □

Le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(\Lambda^\bullet F^\vee)$ est le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module des formes différentielles dites *tangentielles* évoquées dans l'exemple 1.4.18 ; il sera donc noté $\Omega^\bullet(\mathcal{F})$, en accord avec la définition 1.4.1.

La proposition suivante détaille la structure algébrique du fibré vectoriel $Q \to M$.

Proposition 3.1.2 : Le fibré vectoriel $Q \to M$ est un fibré en algèbres de Lie quadratiques, que l'on notera $\mathcal{Q} = (Q \to M, [\cdot,\cdot]_Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$.

Preuve : Tout d'abord on a un crochet $[\cdot,\cdot]_Q$ provenant du crochet de $\mathcal{E}$ défini par $\left[\bar{a},\bar{b}\right]_Q = \overline{[a,b]}$ pour tous $\bar{a},\bar{b} \in \Gamma(Q)$, ce crochet induit est bien défini d'après (2.11) et (2.12). Puisque l'ancre de $\mathcal{E}$ induit l'application nulle sur Q, on obtient un fibré en algèbres de Lie d'après les règles de Leibniz à gauche et à droite. Le produit scalaire sur $\mathcal{E}$ induit un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ donné par $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle_Q = \langle a,b\rangle$ bien défini d'après (2.8), et invariant d'après (2.5). Notons que $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ est bien non dégénérée ; en effet soit $\bar{a} \in \Gamma(Q)$ tel que $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = 0$ pour tout $\bar{b} \in \Gamma(Q)$, alors $\langle a,b\rangle = 0$, pour tout $b \in \Gamma(\operatorname{Ker}\mathsf{a})$ donc $a \in (\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp$ qui est engendré par $\operatorname{Im}\mathsf{D}$ d'après (2.15), d'où $\bar{a} = 0$. On obtient ainsi un fibré vectoriel en algèbres de Lie quadratiques (exemple 2.3.1). □

Corollaire 3.1.3 : Pour tout algébroïde de Courant $\mathcal{E}$ (régulier), l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ (décrit dans la proposition 2.6.4) est un algébroïde de Lie quadratique.

Preuve : Notons encore $\mathsf{a} : E/(\ker\mathsf{a})^\perp \to TM$ l'ancre de $\bar{\mathcal{E}}$, son noyau s'identifie au fibré vectoriel $Q = \operatorname{Ker}\mathsf{a}/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp \to M$ qui a été équipé du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ (voir proposition 3.1.2). D'après la propriété 2.5 on a

$$\left\langle [\bar{a},\bar{b}]_Q, \bar{c}\right\rangle_Q + \left\langle \bar{b}, [\bar{a},\bar{c}]_Q\right\rangle_Q = 0, \tag{3.5}$$

Par conséquent $\bar{\mathcal{E}}$ est un algébroïde de Lie quadratique (définition 1.2.14). □

Définition 3.1.4 : On appelera *formes différentielles tangentielles à valeurs dans* $\mathcal{Q}$ les éléments du $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\Omega^\bullet(\mathcal{F},Q) = \Gamma(\Lambda^\bullet F^\vee \otimes Q)$. Soit $\omega \in \Omega^p(\mathcal{F},Q)$ et $\eta \in \Omega^q(\mathcal{F},Q)$. On définit les opérations

$$\begin{aligned}\langle\cdot\wedge\cdot\rangle_Q &: \Omega^p(\mathcal{F},Q)\times\Omega^q(\mathcal{F},Q) \to \Omega^{p+q}(\mathcal{F}),\\ [\cdot\wedge\cdot]_Q &: \Omega^p(\mathcal{F},Q)\times\Omega^q(\mathcal{F},Q) \to \Omega^{p+q}(\mathcal{F},Q),\end{aligned}$$

par les formules suivantes

$$\begin{aligned}&\langle\omega\wedge\eta\rangle_Q(X_1,\ldots,X_{p+q}) =\\ &\qquad \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\left\langle\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)}),\eta(X_{\sigma(p+1)},\ldots,X_{\sigma(p+q)})\right\rangle_Q,\\ &[\omega\wedge\eta]_Q(X_1,\ldots,X_{p+q}) =\\ &\qquad \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\left[\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)}),\eta(X_{\sigma(p+1)},\ldots,X_{\sigma(p+q)})\right]_Q,\end{aligned}$$

pour tous $X_1,\ldots,X_{p+q} \in \Gamma(F)$; ou bien plus simplement sur des tenseurs élémentaires selon

$$\begin{aligned}\left\langle(\alpha\otimes\bar a)\wedge(\beta\otimes\bar b)\right\rangle_Q&=\langle\bar a,\bar b\rangle_Q\alpha\wedge\beta,\\ \left[(\alpha\otimes\bar a)\wedge(\beta\otimes\bar b)\right]_Q&=(\alpha\wedge\beta)\otimes\left[\bar a,\bar b\right]_Q,\end{aligned}$$

pour tous $\alpha\otimes\bar a\in\Omega^i(\mathcal{F},Q)$ et $\beta\otimes\bar b\in\Omega^j(\mathcal{F},Q)$.

Les algèbres de Lie $\mathbb{Z}$-graduées sont définies dans [Sch79, définition 1, section 1, chapitre 1].

Proposition 3.1.5 : Soit $\omega\in\Omega^p(\mathcal{F},Q)$ et $\eta\in\Omega^q(\mathcal{F},Q)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle\omega\wedge\eta\rangle_Q&=(-1)^{pq}\langle\eta\wedge\omega\rangle_Q,\\ [\omega\wedge\eta]_Q&=-(-1)^{pq}[\eta\wedge\omega]_Q.\end{aligned}$$

Alors $\left(\Omega^\bullet(\mathcal{F},Q),[\cdot\wedge\cdot]_Q\right)$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée.

Preuve : Par définition, $[\cdot\wedge\cdot]_Q$ respecte la $\mathbb{Z}$-graduation au sens où pour tous $\omega\in\Omega^i(\mathcal{F},Q)$ et $\eta\in\Omega^j(\mathcal{F},Q)$, $[\omega\wedge\eta]_Q\in\Omega^{i+j}(\mathcal{F},Q)$. Le crochet $[\cdot\wedge\cdot]_Q$ est antisymétrique gradué puisque pour tous $\alpha\otimes\bar a\in\Omega^i(\mathcal{F},Q)$ et $\beta\otimes\bar b\in\Omega^j(\mathcal{F},Q)$

$$\begin{aligned}\left[(\alpha\otimes\bar a)\wedge(\beta\otimes\bar b)\right]_Q&=(\alpha\wedge\beta)\otimes\left[\bar a,\bar b\right]_Q\\ &=-(-1)^{ij}(\beta\wedge\alpha)\otimes\left[\bar b,\bar a\right]_Q\\ &=-(-1)^{ij}\left[(\beta\otimes\bar b)\wedge(\alpha\otimes\bar a)\right]_Q.\end{aligned}$$

Il reste à montrer l'identité de Jacobi graduée. Soit $\alpha\otimes\bar a\in\Omega^i(\mathcal{F},Q)$, $\beta\otimes\bar b\in\Omega^j(\mathcal{F},Q)$, $\gamma\otimes\bar c\in\Omega^k(\mathcal{F},Q)$; on a

$$\begin{aligned}(-1)^{ik}\left[\alpha\otimes\bar a\wedge\left[\beta\otimes\bar b\wedge\gamma\otimes\bar c\right]_Q\right]_Q&+(-1)^{ij}\left[\beta\otimes\bar b\wedge\left[\gamma\otimes\bar c\wedge\alpha\otimes\bar a\right]_Q\right]_Q\\ &+(-1)^{jk}\left[\gamma\otimes\bar c\wedge\left[\alpha\otimes\bar a\wedge\beta\otimes\bar b\right]_Q\right]_Q\\ =(-1)^{ik}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)\otimes&\left\{\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]_Q\right]_Q+\left[\bar b,\left[\bar c,\bar a\right]_Q\right]_Q+\left[\bar c,\left[\bar a,\bar b\right]_Q\right]_Q\right\},\end{aligned}$$

ce qui vaut 0 d'après l'identité de Jacobi pour $\mathcal{Q}$. □

Définition 3.1.6 : Soit $\omega\in\Omega^k(\mathcal{F},Q)$. On définit $\mathrm{ad}_\omega\in\Gamma(\Lambda^kF^\vee\otimes\operatorname{End}Q)$ par

$$\mathrm{ad}_\omega(X_1,\ldots,X_k)(\bar a)=\left[\omega(X_1,\ldots,X_k),\bar a\right]_Q,$$

pour tous $X_1,\ldots,X_k\in\Gamma(F)$ et $\bar a\in\Gamma(Q)$.

Nous présentons ensuite quelques calculs qui seront utiles par la suite.

Lemme 3.1.7 : Soit A, $A'\in\Omega^1(\mathcal{F},Q)$. Alors pour tous $X,Y\in\Gamma(F)$ on a

$$\langle A\wedge A'\rangle_Q(X,Y)=\left\langle A(X),A'(Y)\right\rangle_Q-\left\langle A(Y),A'(X)\right\rangle_Q.$$

Lemme 3.1.8 : Soit $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $R \in \Omega^2(\mathcal{F}, Q)$. Alors pour tous X, Y, et $Z \in \Gamma(F)$ on a

$$\big\langle A \wedge R \big\rangle_Q (X, Y, Z) = \big\langle A(X), R(Y, Z) \big\rangle_Q - \big\langle A(Y), R(X, Z) \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), R(X, Y) \big\rangle_Q.$$

Lemme 3.1.9 : Soit $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$. Alors pour tous X, Y, et $Z \in \Gamma(F)$ on a

$$[A \wedge A]_Q (X, Y) = 2\big[A(X), A(Y)\big]_Q,$$

et d'après (2.5) on a

$$\big\langle A \wedge [A, A]_Q \big\rangle_Q (X, Y, Z) = 6\big\langle A(X), [A(Y), A(Z)]_Q \big\rangle_Q.$$

Lemme 3.1.10 : Soit $\omega, \eta \in \Omega^\bullet(\mathcal{F}, Q)$ et soit $\nabla : \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee \otimes Q)$ une $\mathcal{F}$-connexion (voir définition 1.5.3) que l'on suppose compatible avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ au sens où

$$X \cdot \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \big\langle \nabla_X \bar{a}, \bar{b} \big\rangle_Q + \big\langle \bar{a}, \nabla_X \bar{b} \big\rangle_Q,$$

pour tout $X \in \Gamma(F)$, $\bar{a}$ et $\bar{b} \in \Gamma(Q)$. Alors

$$\mathbf{d}\langle \omega \wedge \eta \rangle_Q = \langle \mathbf{d}_\nabla \omega \wedge \eta \rangle_Q + (-1)^p \langle \omega \wedge \mathbf{d}_\nabla \eta \rangle_Q,$$

pour tous $\omega \in \Omega^p(\mathcal{F}, Q)$ et $\eta \in \Omega^q(\mathcal{F}, Q)$.

Preuve : Pour tous $\omega = \alpha \otimes \bar{a} \in \Omega^p(\mathcal{F}, Q)$ et $\eta = \beta \otimes \bar{b} \in \Omega^q(\mathcal{F}, Q)$, d'après la compatibilité avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\langle \omega \wedge \eta \rangle_Q &= \mathbf{d}\Big\{ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q (\alpha \wedge \beta) \Big\} \\
&= \big\{ \mathbf{d}\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \big\} \alpha \wedge \beta + \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) \\
&= \langle \nabla \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \alpha \wedge \beta + \langle \bar{a}, \nabla \bar{b} \rangle_Q \alpha \wedge \beta \\
&\qquad + \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \alpha \wedge \mathbf{d}\beta,
\end{aligned}$$

puis d'après le théorème 1.5.4, et en supposant $\nabla \bar{a} = A \otimes \bar{a}'$ et $\nabla \bar{b} = B \otimes \bar{b}'$ avec A, $B \in \Omega^1(\mathcal{F})$ et $\bar{a}', \bar{b}' \in \Gamma(Q)$, on a d'autre part que

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{d}_\nabla \omega \wedge \eta \rangle_Q + (-1)^p \langle \omega \wedge \mathbf{d}_\nabla \eta \rangle_Q \\
&\quad = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \langle \bar{a}', \bar{b} \rangle_Q \alpha \wedge A \wedge \beta \\
&\qquad + (-1)^p \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \alpha \wedge \mathbf{d}\beta + (-1)^{p+q} \langle \bar{a}, \bar{b}' \rangle_Q \alpha \wedge \beta \wedge B,
\end{aligned}$$

et les deux membres sont égaux par la commutativité graduée du produit extérieur et du fait que $\langle \nabla \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q = \langle A \otimes \bar{a}', \bar{b} \rangle_Q$ et $\langle \bar{a}, \nabla \bar{b} \rangle_Q = \langle \bar{a}, B \otimes \bar{b}' \rangle_Q$. La preuve générale s'en déduit en utilisant des combinaisons $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaires de tenseurs élémentaires. □

Définition 3.1.11 : Sur $\Omega^\bullet(\mathcal{F}, Q)$ on définit le *produit intérieur* ainsi que la *dérivée de Lie* sur les tenseurs élémentaires par

$$\bar{\boldsymbol{\iota}}_X(\omega \otimes \bar{a}) = \boldsymbol{\iota}_X \omega \otimes \bar{a}, \quad \overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_X(\omega \otimes \bar{a}) = \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \omega \otimes \bar{a},$$

pour tous $X \in \Gamma(F)$, $\omega \in \Omega^k(\mathcal{F})$ et $\bar{a} \in \Gamma(A)$.

Les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\iota}}_X$ et $\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_X$ introduits ci-dessus héritent des propriétés des opérateurs $\boldsymbol{\iota}_X$ et $\boldsymbol{\mathscr{L}}_X$.

Le théorème qui suit est apparu dans [CSX13], il est fondamental au sens où il permet d'obtenir une décomposition d'un algébroïde de Courant régulier qui est à rapprocher de l'exemple des algébroïdes de Courant exacts (voir proposition 2.3.7). Nous en donnons une présentation légèrement différente ; une preuve détaillée est donnée dans l'annexe.

Notation 3.1.12 : Dans la suite on notera exceptionnellement le crochet de Lie des champs de vecteurs par $\{\cdot,\cdot\}$ pour éviter toute confusion possible avec d'autres crochets, et on désignera par $(\boldsymbol{\mathscr{L}}_X, \mathbf{d}, \boldsymbol{\iota}_X)$ le triplet de Cartan associé à l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ (voir 3.1.1) pour alléger les expressions (voir remarque 1.4.19).

Théorème 3.1.13 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ un algébroïde de Courant régulier. Soit $\lambda : F \to E$ et $\sigma : Q \to \operatorname{Ker} \mathsf{a}$ deux scindements comme explicité dans le diagramme (3.3). L'isomorphisme Δ associé à ces deux scindements, défini par (3.4), permet de transporter la structure d'algébroïde de Courant de $E \to M$ sur $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ selon

$$
\begin{aligned}
\mathsf{a}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) &= X,\\
\langle \alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y\rangle &= \alpha(Y) + \beta(X) + \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle_Q,\\
[X,Y] &= \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H \oplus R(X,Y) \oplus \{X,Y\},\\
[X,\bar{a}] = -[\bar{a},X] &= K(X,\bar{a}) \oplus \nabla_X \bar{a},\\
[X,\alpha] &= \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \alpha,\\
[\alpha, X] &= -\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\alpha + \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_X\alpha = -\boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}\alpha,\\
[\bar{a},\bar{b}] &= P(\bar{a},\bar{b}) \oplus [\bar{a},\bar{b}]_Q,\\
[\alpha,\bar{a}] = [\bar{a},\alpha] &= [\alpha,\beta] = 0,
\end{aligned}
$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y \in \Gamma(F)$; où $H \in \Omega^3(\mathcal{F})$, $R \in \Omega^2(\mathcal{F}, Q)$ et ∇ est une $\mathcal{F}$-connexion sur $Q \to M$ (voir définition 1.5.3), qui dépendent des scindements λ et σ, et où les quantités intermédiaires $K : \Gamma(F) \otimes \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee)$ et $P : \Gamma(Q) \otimes \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee)$ sont définies par

$$
\begin{aligned}
K(X,\bar{a})(Y) &= -\big\langle \bar{a}, R(X,Y)\big\rangle_Q,\\
P(\bar{a},\bar{b})(X) &= \big\langle \bar{b}, \nabla_X \bar{a}\big\rangle_Q.
\end{aligned}
$$

En notant $\mathbf{d}_\nabla$ la dérivée extérieure covariante associée à la représentation de $\mathcal{F}$ sur $(Q \to M, \nabla)$ (voir (1.12)), on obtient que ∇, R et H satisfont en outre les relations de compatibilité suivantes :

$$X \cdot \big\langle \bar{a}, \bar{b}\big\rangle_Q = \big\langle \nabla_X \bar{a}, \bar{b}\big\rangle_Q + \big\langle \bar{a}, \nabla_X \bar{b}\big\rangle_Q, \tag{3.6}$$

$$\nabla_X [\bar{a},\bar{b}]_Q = \big[\nabla_X \bar{a}, \bar{b}\big]_Q + \big[\bar{a}, \nabla_X \bar{b}\big]_Q, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{d}_\nabla R = 0, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{d}_\nabla^2 = \mathrm{ad}_R, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{d}H = \frac{1}{2}\langle R \wedge R\rangle_Q, \tag{3.10}$$

pour tous $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y, Z \in \Gamma(F)$.

Remarque 3.1.14 : Sous forme condensée, le crochet sur $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ s'écrit

$$[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y] = \boldsymbol{\mathscr{L}}_X\beta - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\alpha + \langle \nabla\bar{a}, \bar{b}\rangle_Q - \langle \bar{b}, \bar{\boldsymbol{\iota}}_X R\rangle_Q + \langle \bar{a}, \bar{\boldsymbol{\iota}}_Y R\rangle_Q \\ + \boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X H \oplus [\bar{a}, \bar{b}]_Q + \nabla_X\bar{b} - \nabla_Y\bar{a} + \bar{\boldsymbol{\iota}}_Y\bar{\boldsymbol{\iota}}_X R \oplus \{X, Y\}. \tag{3.11}$$

Proposition 3.1.15 : Soit M une variété et $F \to M$ une distribution involutive induisant un feuilletage $\mathcal{F}$ et *a fortiori* un algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ d'après 1.2.11. Soit $(Q \to M, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ un fibré en algèbres de Lie quadratiques donnant un algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ (exemple 2.3.2), ainsi que ∇ une $\mathcal{F}$-connexion sur $Q \to M$, $R \in \Omega^2(\mathcal{F}, Q)$ et $H \in \Omega^3(\mathcal{F})$ tels que les conditions de compatibilité (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) soient satisfaites. Alors l'ancre définie par $\mathsf{a}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = X$, le produit scalaire défini par $\langle \alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y\rangle = \alpha(Y) + \beta(X) + \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle_Q$, le crochet (3.11) confèrent au fibré vectoriel $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ une structure d'algébroïde de Courant, dite *standard* (voir [CSX13, section 2]) et notée $\mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ par la suite. Cet algébroïde de Courant est régulier, les inclusions $F \hookrightarrow F^\vee \oplus Q \oplus F$ et $Q \hookrightarrow Q \oplus F$ sont deux scindements canoniques du diagramme (3.3).

Un corollaire de ce théorème de structure est une description explicite de l'algébroïde de Lie $\bar{\mathcal{E}}$ associé à l'algébroïde de Courant $\mathcal{E}$ (voir 2.6.4).

Corollaire 3.1.16 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant (régulier) et soit $\bar{\mathcal{E}}$ son algébroïde de Lie associé (voir proposition 2.6.4). Soit $\lambda : F \to E$ et $\sigma : Q \to \operatorname{Ker}\mathsf{a}$ deux scindements comme explicité dans le diagramme (3.3). L'isomorphisme Δ associé à ces deux scindements, défini par (3.4), induit un isomorphisme de fibrés vectoriels $\bar{\Delta}$ entre $Q \oplus F \to M$ et $E/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp \to M$, qui transporte la structure d'algébroïde de Lie quadratique de $\bar{\mathcal{E}}$ sur $Q \oplus F \to M$ selon

$$\begin{aligned} \mathsf{a}(\bar{a} \oplus X) &= X, \\ \langle \bar{a} \oplus X, \bar{b} \oplus Y\rangle &= \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle_Q, \\ [X, Y] &= R(X, Y) \oplus \{X, Y\}, \\ [X, \bar{a}] &= -[\bar{a}, X] = \nabla_X\bar{a}, \\ [\bar{a}, \bar{b}] &= [\bar{a}, \bar{b}]_Q, \end{aligned}$$

soit, sous forme condensée,

$$[\bar{a} \oplus X, \bar{b} \oplus Y] = [\bar{a}, \bar{b}]_Q + \nabla_X\bar{b} - \nabla_Y\bar{a} + R(X, Y) \oplus \{X, Y\}.$$

On notera l'algébroïde de Lie résultant par $\bar{\mathcal{S}}_M[\nabla, R]$.

Preuve : L'isomorphisme $\Delta : F^\vee \oplus Q \oplus F \to E$ induit un isomorphisme $\bar{\Delta} : Q \oplus F \to E/(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp$ car Δ envoie $F^\perp$ dans $(\operatorname{Ker}\mathsf{a})^\perp$. En effet soit $\alpha \in \Gamma(F^\perp)$ et soit $u \in \Gamma(\operatorname{Ker}\mathsf{a})$, on a $\langle \mathsf{a}^\vee(\alpha)^\sharp, u\rangle = \langle \alpha | \mathsf{a}(u)\rangle = 0$. □

Définition 3.1.17 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier. Une *dissection* de $\mathcal{E}$ est la donnée de scindements λ de (3.1) et σ de (3.2). Ces scindements déterminent l'isomorphisme Δ de fibrés vectoriels (3.4) ainsi que la $\mathcal{F}$-connexion ∇, la 2-forme R à valeurs dans $\mathcal{Q}$ et la 3-forme H, au sens du théorème précédent. Dans tout ce qui suit, étant donné une dissection $\mathcal{E}$, on ne manipulera que Δ, ∇, R et H. Pour cette raison, on notera (Δ, ∇, R, H) cette dissection (historiquement, les dissections ont été définies dans [CSX13, section 1.3] et correspondent à l'isomorphisme Δ).

Remarque 3.1.18 : Par construction (voir les propositions 3.1.1 et 3.1.2), les fibrés vectoriels $F \to M$ et $Q \to M$ sont indépendants des scindements λ et σ. De même, l'ancre a et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ sont indépendants de ces scindements. En revanche, l'isomorphisme Δ ainsi que ∇, R et H en dépendent directement (voir la preuve du théorème 3.1.13 donnée en annexe). Remarquons qu'en tant que fibré en algèbres de Lie quadratiques, $\mathcal{Q}$ est un algébroïde de Courant (voir exemple 2.3.2) dont le crochet $[\cdot,\cdot]_Q$ ne dépend pas de la dissection, tout comme le crochet sur $\mathcal{F}$. L'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ et l'algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ ont donc un sens indépendamment de toute dissection.

Remarque 3.1.19 : $\mathcal{Q}$ est un fibré en algèbres de Lie quadratiques donc en particulier un algébroïde de Courant (voir exemple 2.3.1) ; $\mathcal{Q}$ n'est cependant pas un sous-algébroïde de Courant de $\mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ puisque, pour $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$, on n'a pas nécessairement que $[\bar{a}, \bar{b}] \in \Gamma(Q)$, l'obstruction étant donnée par $P \in \Gamma\big((Q^{\otimes 2} \otimes F)^\vee\big)$. Cependant en oubliant le produit scalaire, $\mathcal{Q}$ peut-être considéré comme un sous-algébroïde de Lie de $\bar{\mathcal{S}}_M[\nabla, R]$.

Remarque 3.1.20 : Lorsque $\langle R \wedge R\rangle_Q = 0$ (on verra plus loin que cette 4-forme tangentielle ne dépend pas de la dissection choisie), on peut former un algébroïde de Courant exact sur le fibré vectoriel $F \oplus F^\vee \to M$ (exemple 2.35). Cependant on n'obtient pas un sous-algébroïde de Courant de $\mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ puisque, pour $X \oplus \alpha, Y \oplus \beta \in \Gamma(F \oplus F^\vee)$, on n'a pas nécessairement que $[X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] \in \Gamma(F \oplus F^\vee)$, l'obstruction étant donnée par $R \in \Omega^2(\mathcal{F}, Q)$.

Remarque 3.1.21 : Lorsque $R = 0$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ forment une paire bicroisée d'algébroïdes de Lie (voir [Mok97]). D'autre part, lorsque $\langle R \wedge R\rangle_Q = 0$, on peut former un algébroïde de Courant exact sur le fibré vectoriel $F \oplus F^\vee \to M$ (exemple 2.35) associé à la 3-forme H ; notons le $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\vee$. Dans ce cas, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\vee$ forment une paire bicroisée d'algébroïdes de Courant (voir [GS14, proposition 4.21]).

3.2 Changement de dissection

Fixons $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}_E, [\cdot,\cdot]_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ un algébroïde de Courant (régulier) et soit (Δ, ∇, R, H) et $(\hat{\Delta}, \hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H})$ deux dissections de $\mathcal{E}$ (définition 3.1.17), fournissant par construction des isomorphismes d'algébroïdes de Courant couvrant l'identité de M (au sens de la définition 2.6.1) $\Delta^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ et $\hat{\Delta}^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$ (voir théorème 3.1.13). On a alors le diagramme commutatif de fibrés vectoriels suivant

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\Delta^{-1}"'] \arrow[dr, "\hat{\Delta}^{-1}"] & \\ F^\vee \oplus Q \oplus F \arrow[rr, "\delta = \hat{\Delta}^{-1} \circ \Delta"] & & F^\vee \oplus Q \oplus F \end{tikzcd} .$$

Par conséquent le *changement de dissection* $\delta : \mathcal{S}_M[\nabla, R, H] \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$ défini par $\delta = \hat{\Delta}^{-1} \circ \Delta$ est un isomorphisme d'algébroïdes de Courant de base M.

Définition 3.2.1 : Soit $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$. On notera $A^\dagger : \Gamma(Q^\vee) \cong \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee)$ l'application duale de $A : \Gamma(F) \to \Gamma(Q)$; autrement dit $\big\langle A(X), \bar{a}\big\rangle_Q = \big\langle X, A^\dagger(\bar{a})\big\rangle_Q$, pour tous $X \in \Gamma(F)$ et $\bar{a} \in \Gamma(Q)$.

Définition 3.2.2 : Soit $\mathbf{O}(Q)$ le groupe des automorphismes orthogonaux du fibré vectoriel $Q \to M$ équipé du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$.

Proposition 3.2.3 : Tout isomorphisme d'algébroïdes de Courant $\Phi : \mathcal{S}_M[\nabla, R, H] \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$, couvrant l'identité de M (voir définition 2.6.1), est de la forme

$$\Phi(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \alpha + \boldsymbol{\iota}_X B - \frac{1}{2} A^\dagger\big(A(X)\big) - A^\dagger\big(\tau(\bar{a})\big) \oplus \tau(\bar{a}) + A(X) \oplus X, \quad (3.12)$$

avec $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$, $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ et $\tau \in \mathbf{O}(Q)$ couvrant l'identité de M.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Alors pour tous $u, v \in \Gamma(E)$, $\Phi\big([fu, v]\big) = \big[\Phi(fu), \Phi(v)\big]$, que nous calculons de deux manières différentes. D'une part on a

$$\begin{aligned} \Phi\big([fu, v]\big) &= \Phi\big(f[u, v] - (\mathsf{a}(v) \cdot f)u + \langle u, v\rangle \mathsf{D}f\big) \\ &= f\Phi\big([u, v]\big) - (\mathsf{a}(v) \cdot f)\Phi(u) + \langle u, v\rangle \Phi(\mathsf{D}f), \end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned} \big[\Phi(fu), \Phi(v)\big] &= \big[f\Phi(u), \Phi(v)\big] \\ &= f\big[\Phi(u), \Phi(v)\big] - \big(\mathsf{a}\left(\Phi(v)\right) \cdot f\big)\Phi(u) + \big\langle \Phi(u), \Phi(v)\big\rangle \mathsf{D}f, \end{aligned}$$

d'où

$$-(\mathsf{a}(v) \cdot f)\Phi(u) + \langle u, v\rangle \Phi(\mathsf{D}f) = -\left(\mathsf{a}\left(\Phi(v)\right) \cdot f\right)\Phi(u) + \big\langle \Phi(u), \Phi(v)\big\rangle \mathsf{D}f.$$

Puis en prenant $u = X, v = Y \in \Gamma(F)$, on a $\langle u, v\rangle = 0$ et la relation précédente devient $(\mathsf{a}(v) \cdot f)\Phi(u) = \left(\mathsf{a}\left(\Phi(v)\right) \cdot f\right)\Phi(u)$. Φ étant un isomorphisme, la fonction f étant quelconque, on en déduit, en prenant $u = X \in \Gamma(F)$ une section non nulle, que $\mathsf{a}\left(\Phi(Y)\right) = Y$ pour tout $Y \in \Gamma(F)$. Par suite, la relation précédente permet d'obtenir $\Phi(\mathsf{D}f) = \mathsf{D}f$ et puisque $\mathsf{D} = \mathbf{d}$, il vient $\Phi|_{F^\vee} = \mathrm{Id}_{F^\vee}$. De ceci on en déduit que pour tous $\bar{a} \in \Gamma(Q)$ et $\alpha \in \Gamma(F^\vee)$ on a $\big\langle \Phi(\bar{a}), \alpha\big\rangle = \big\langle \Phi(\bar{a}), \Phi(\alpha)\big\rangle = \langle \bar{a}, \alpha\rangle = 0$, donc finalement Φ s'écrit sous forme matricielle

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & \gamma & \beta \\ 0 & \tau & A \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix},$$

avec des applications $\tau : \Gamma(Q) \to \Gamma(Q)$, $A : \Gamma(F) \to \Gamma(Q)$, $\beta : \Gamma(F) \to \Gamma(F^\vee)$ et $\gamma : \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee)$. Φ préserve le produit scalaire donc $\big\langle \Phi(X), \Phi(X)\big\rangle = 0$ pour tout $X \in \Gamma(F)$ donc $\beta(X) = -\frac{1}{2} A^\dagger \circ A(X)$. De manière générale, on peut toujours ajouter à β un élément de $\Omega^2(\mathcal{F})$, sans rompre l'orthogonalité, de Φ donc finalement

$$\beta = B - \frac{1}{2} A^\dagger \circ A,$$

pour un certain $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$. A présent, Φ étant une isométrie on doit avoir $\big\langle \Phi(\bar{a}), \Phi(X) \big\rangle = \langle \bar{a}, X \rangle = 0$ pour tous $X \in \Gamma(F)$ et $\bar{a} \in \Gamma(Q)$; d'où l'on déduit

$$\gamma = -A^\dagger \circ \tau,$$

Enfin $\tau \in \mathbf{O}(Q)$ puisque

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q = \big\langle \Phi(\bar{a}), \Phi(\bar{b}) \big\rangle = \big\langle \gamma(\bar{a}) \oplus \tau(\bar{a}), \gamma(\bar{b}) \oplus \tau(\bar{b}) \big\rangle = \big\langle \tau(\bar{a}), \tau(\bar{b}) \big\rangle_Q,$$

et τ est inversible puisque Φ l'est. □

Partant de la relation (2.40) et du lemme précédent appliqué à δ, nous allons établir des relations entre ∇, R et H d'une part, et $\hat{\nabla}$, $\hat{R}$ et $\hat{H}$ d'autre part. Pour cela nous écrivons le changement de dissection δ sous la forme $\delta = \Psi_\tau \circ \Psi_A \circ \Psi_B$ (comparativement à (3.12), on a fait le changement biunivoque $A \mapsto \tau \circ A$, τ étant un automorphisme de $Q \to M$), où Ψ_τ, Ψ_A et Ψ_B sont les applications définies par

$$\Psi_\tau(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \alpha \oplus \tau(\bar{a}) \oplus X, \tag{3.13}$$

$$\Psi_A(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \alpha - \frac{1}{2} A^\dagger\big(A(X)\big) - A^\dagger(\bar{a}) \oplus \bar{a} + A(X) \oplus X, \tag{3.14}$$

$$\Psi_B(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \alpha + \boldsymbol{\iota}_X B \oplus \bar{a} \oplus X, \tag{3.15}$$

pour tous $\alpha \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a} \in \Gamma(Q)$ et $X \in \Gamma(F)$. On pourra également écrire les applications Ψ_τ, Ψ_A et Ψ_B sous forme matricielle :

$$\Psi_\tau = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}, \quad \Psi_A = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A^\dagger & -\frac{1}{2}A^\dagger \circ A \\ 0 & \mathrm{Id} & A \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}, \quad \Psi_B = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 & B^\sharp \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix},$$

avec l'application $B^\sharp : \Gamma(F) \to \Gamma(F^\vee)$ définie par $B^\sharp(X)(Y) = B(X, Y)$, pour tous X et $Y \in \Gamma(F)$.

Lemme 3.2.4 : Soit $\tau \in \mathbf{O}(Q)$ et considérons l'endomorphisme de fibré vectoriel

$$\Psi_\tau : F^\vee \oplus Q \oplus F \to F^\vee \oplus Q \oplus F$$

défini par (3.13). Alors de l'identité

$$\Psi_\tau[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\nabla, R, H} = \big[\Psi_\tau(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_\tau(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}},$$

avec $\alpha, \beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y \in \Gamma(F)$, on obtient que τ préserve $[\cdot, \cdot]_Q$ (donc $\tau \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$, le groupe des automorphismes de l'algébroïde de Lie $\mathcal{Q}$), et que τ satisfait les relations

$$\nabla - \tau^{-1} \circ \hat{\nabla} \circ \tau = 0,$$
$$R - \tau^{-1} \circ \hat{R} = 0.$$

Preuve : D'une part on a

$$\begin{aligned}
&\big[\Psi_\tau(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_\tau(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]_{\hat\nabla,\hat R,\hat H}\\
&\quad=\big[\alpha\oplus\tau(\bar a)\oplus X,\beta\oplus\tau(\bar b)\oplus Y\big]\\
&\quad=\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\beta-\boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\alpha+\big\langle\hat\nabla\tau(\bar a),\tau(\bar b)\big\rangle_Q+\big\langle\tau(\bar a),\bar{\boldsymbol{\iota}}_Y\hat R\big\rangle_Q-\big\langle\tau(\bar b),\bar{\boldsymbol{\iota}}_X\hat R\big\rangle_Q\\
&\qquad\oplus\big[\tau(\bar a),\tau(\bar b)\big]_Q+\hat\nabla_X\tau(\bar b)-\hat\nabla_Y\tau(\bar a)+\hat R(X,Y)\oplus\{X,Y\},
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\Psi_\tau[\alpha\oplus\bar a\oplus X,\beta\oplus\bar b\oplus Y]&=\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\beta-\boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\alpha+\langle\nabla\bar a,\bar b\rangle_Q+\langle\bar a,\bar{\boldsymbol{\iota}}_Y R\rangle_Q-\langle\bar b,\bar{\boldsymbol{\iota}}_X R\rangle_Q\\
&\oplus\tau\big([\bar a,\bar b]_Q\big)+\tau(\nabla_X\bar b)-\tau(\nabla_Y\bar a)+\tau\big(R(X,Y)\big)\oplus\{X,Y\}.
\end{aligned}$$

Projetant sur $\Gamma(Q)$, on obtient les trois conditions de l'énoncé. Les deux dernières conditions assurent en particulier l'égalité des termes obtenus après projection sur $\Gamma(F^\vee)$ puisque τ étant un automorphisme orthogonal de $Q\to M$, son adjoint est τ^{-1}, et il vient

$$\begin{aligned}
\big\langle\tau(\bar a),\hat R(Y,Z)\big\rangle_Q&=\Big\langle\bar a,\tau^{-1}\big(\hat R(Y,Z)\big)\Big\rangle_Q,\\
\big\langle\hat\nabla\tau(\bar a),\tau(\bar b)\big\rangle_Q&=\Big\langle\tau^{-1}\big(\hat\nabla\tau(\bar a)\big),\bar b\Big\rangle_Q.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.5 : Soit $A\in\Omega^1(\mathcal{F},Q)$ et considérons l'endomorphisme de fibré vectoriel

$$\Psi_A:F^\vee\oplus Q\oplus F\to F^\vee\oplus Q\oplus F$$

défini par (3.14). Alors de l'identité

$$\Psi_A[\alpha\oplus\bar a\oplus X,\beta\oplus\bar b\oplus Y]_{\nabla,R,H}=\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]_{\hat\nabla,\hat R,\hat H},$$

avec $\alpha,\beta\in\Gamma(F^\vee)$, $\bar a,\bar b\in\Gamma(Q)$ et $X,Y\in\Gamma(F)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla-\hat\nabla&=\mathrm{ad}_A,\\
R-\hat R&=\mathbf{d}_{\hat\nabla}A+\frac12[A\wedge A]_Q,\\
H-\hat H&=\langle A\wedge\hat R\rangle_Q+\frac12\langle A\wedge\mathbf{d}_{\hat\nabla}A\rangle_Q+\frac16\big\langle A\wedge[A\wedge A]_Q\big\rangle_Q.
\end{aligned}$$

Preuve : Nous commençons par calculer $\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]_{\hat\nabla,\hat R,\hat H}$. Nous omettrons les références à $\hat\nabla$, $\hat R$, et $\hat H$ en indice pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
&\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]\\
&\qquad=\Big[\alpha-A^\dagger(\bar a)-\frac12A^\dagger\circ A(X)\oplus\bar a+\boldsymbol{\iota}_XA\oplus X,\\
&\qquad\qquad\beta-A^\dagger(\bar b)-\frac12A^\dagger\circ A(Y)\oplus\bar b+\boldsymbol{\iota}_YA\oplus Y\Big]\\
&\qquad=[\alpha\oplus\bar a\oplus X,\beta\oplus\bar b\oplus Y]-[A^\dagger(\bar a),Y]-\frac12[A^\dagger\circ A(X),Y]\\
&\qquad\qquad+[\bar a,A(Y)]-[X,A^\dagger(\bar b)]-\frac12[X,A^\dagger\circ A(Y)]+[X,A(Y)]\\
&\qquad\qquad+[A(X),A(Y)]+[A(X),\bar b]+[A(X),Y]
\end{aligned}$$

Puis en développant tous les crochets excepté le premier on obtient

$$\begin{aligned}\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big] &= [\alpha\oplus\bar a\oplus X,\beta\oplus\bar b\oplus Y]\\ &+\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y A^\dagger(\bar a)-\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y A^\dagger(\bar a)+\frac12\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y A^\dagger(A(X))-\frac12\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y A^\dagger(A(X))\\ &+\big\langle A(Y),\hat\nabla\bar a\big\rangle_Q+\big[\bar a,A(Y)\big]_Q-\boldsymbol{\mathscr{L}}_X A^\dagger(\bar b)-\frac12\boldsymbol{\mathscr{L}}_X A^\dagger(A(Y))\\ &-\big\langle A(Y),\boldsymbol{\iota}_X\hat R\big\rangle_Q+\hat\nabla_X A(Y)+\big\langle A(Y),\hat\nabla A(X)\big\rangle_Q+\big\langle\bar b,\hat\nabla A(X)\big\rangle_Q\\ &+\big[A(X),A(Y)\big]_Q+\big[A(X),\bar b\big]_Q+\big\langle A(X),\boldsymbol{\iota}_Y\hat R\big\rangle_Q-\hat\nabla_Y A(X).\end{aligned}$$

A présent, pour faciliter le calcul, soit $Z\in\Gamma(F)$, nous allons évaluer $\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]\in\Gamma(F^\vee)\oplus\Gamma(Q)\oplus\Gamma(F)$ sur Z ; on obtient ainsi un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)\oplus\Gamma(Q)\oplus\Gamma(F)$. Calculons à part les termes en bleu ci-dessus

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\iota}_Z\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y A^\dagger(\bar a)-\boldsymbol{\iota}_Z\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y A^\dagger(\bar a)+\frac12\boldsymbol{\iota}_Z\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y A^\dagger(A(X))\\ &\quad-\frac12\boldsymbol{\iota}_Z\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y A^\dagger(A(X))-\boldsymbol{\iota}_Z\boldsymbol{\mathscr{L}}_X A^\dagger(\bar b)-\frac12\boldsymbol{\iota}_Z\boldsymbol{\mathscr{L}}_X A^\dagger(A(Y))=\\ &\big\langle\hat\nabla_Y A(Z),\bar a\big\rangle_Q+\big\langle A(Z),\hat\nabla_Y\bar a\big\rangle_Q-\big\langle A(\{Y,Z\}),\bar a\big\rangle_Q-\big\langle\hat\nabla_Z A(Y),\bar a\big\rangle_Q\\ &\quad-\big\langle A(Y),\hat\nabla_Z\bar a\big\rangle_Q+\frac12\big\langle\hat\nabla_Y A(X),A(Z)\big\rangle_Q+\frac12\big\langle A(X),\hat\nabla_Y A(Z)\big\rangle_Q\\ &\quad-\frac12\big\langle\hat\nabla_Z A(X),A(Y)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(X),\hat\nabla_Z A(Y)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(\{Y,Z\}),A(X)\big\rangle_Q\\ &\quad-\big\langle\hat\nabla_X A(Z),\bar b\big\rangle_Q-\big\langle A(Z),\hat\nabla_X\bar b\big\rangle_Q+\big\langle A(\{X,Z\}),\bar b\big\rangle_Q\\ &\quad-\frac12\big\langle\hat\nabla_X A(Y),A(Z)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(Y),\hat\nabla_X A(Z)\big\rangle_Q+\frac12\big\langle A(\{X,Z\}),A(Y)\big\rangle_Q,\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\iota}_Z\big[\Psi_A(\alpha\oplus\bar a\oplus X),\Psi_A(\beta\oplus\bar b\oplus Y)\big]=\boldsymbol{\iota}_Z[\alpha\oplus\bar a\oplus X,\beta\oplus\bar b\oplus Y]+\\ &\big\langle\hat\nabla_Y A(Z),\bar a\big\rangle_Q+\big\langle A(Z),\hat\nabla_Y\bar a\big\rangle_Q-\big\langle A(\{Y,Z\}),\bar a\big\rangle_Q-\big\langle\hat\nabla_Z A(Y),\bar a\big\rangle_Q\\ &-\big\langle A(Y),\hat\nabla_Z\bar a\big\rangle_Q+\frac12\big\langle\hat\nabla_Y A(X),A(Z)\big\rangle_Q+\frac12\big\langle A(X),\hat\nabla_Y A(Z)\big\rangle_Q\\ &-\frac12\big\langle\hat\nabla_Z A(X),A(Y)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(X),\hat\nabla_Z A(Y)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(\{Y,Z\}),A(X)\big\rangle_Q\\ &-\big\langle\hat\nabla_X A(Z),\bar b\big\rangle_Q-\big\langle A(Z),\hat\nabla_X\bar b\big\rangle_Q+\big\langle A(\{X,Z\}),\bar b\big\rangle_Q\\ &-\frac12\big\langle\hat\nabla_X A(Y),A(Z)\big\rangle_Q-\frac12\big\langle A(Y),\hat\nabla_X A(Z)\big\rangle_Q+\frac12\big\langle A(\{X,Z\}),A(Y)\big\rangle_Q\\ &+\big\langle A(Y),\hat\nabla_Z\bar a\big\rangle_Q+[\bar a,A(Y)]_Q-\big\langle A(Y),\hat R(X,Z)\big\rangle_Q+\hat\nabla_X A(Y)\\ &+\big\langle A(Y),\hat\nabla_Z A(X)\big\rangle_Q+\big\langle\bar b,\hat\nabla_Z A(X)\big\rangle_Q+\big[A(X),A(Y)\big]_Q\\ &+\big[A(X),\bar b\big]_Q+\big\langle A(X),\hat R(Y,Z)\big\rangle_Q-\hat\nabla_Y A(X).\end{aligned}\tag{3.16}$$

D'autre part nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}} = {} & [\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y] \\ & - A^\dagger\big([\bar{a}, \bar{b}]_Q\big) - A^\dagger\big(\hat{R}(X,Y)\big) - A^\dagger\big(\hat{\nabla}_X \bar{b}\big) \\ & + A^\dagger\big(\hat{\nabla}_Y \bar{a}\big) - \frac{1}{2}(A^\dagger \circ A)\big(\{X,Y\}\big) + A\big(\{X,Y\}\big),\end{aligned}$$

et par conséquent en substituant $[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]$ obtenu de l'expression précédente au terme $[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]$ de (3.16) il vient

$$\begin{aligned}& \boldsymbol{\iota}_Z\big[\Psi_A(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_A(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, H} \\ & \quad = \boldsymbol{\iota}_Z \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, H} \\ & \qquad + \big\langle A(Z), [\bar{a}, \bar{b}]_Q \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), \hat{R}(X,Y) \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), \hat{\nabla}_X \bar{b} \big\rangle_Q \\ & \qquad - \big\langle A(Z), \hat{\nabla}_Y \bar{a} \big\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle A(Z), A(\{X,Y\}) \big\rangle_Q - A\big(\{X,Y\}\big) \\ & \qquad + \text{ la liste de termes (3.16) excepté le premier.}\end{aligned} \tag{3.17}$$

Le but à présent est donc d'identifier les termes supplémentaires et de comprendre comment ils peuvent s'ajouter à $\hat{\nabla}$, $\hat{R}$ et $\hat{H}$. Tout d'abord les termes de couleur orange se compensent, les termes de couleur verte correspondent à la 3-forme $\frac{1}{2}\langle A \wedge \hat{R}\rangle_Q$, le terme de couleur marron correspond à la 2-forme $\frac{1}{2}[A \wedge A]_Q$ à valeurs dans $\mathcal{Q}$ et les termes de couleur bleue correspondent à la 2-forme $\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A$ à valeurs dans $\mathcal{Q}$. Or si nous ajoutons $\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A$ à $\hat{R}$ et considérons le crochet associé, alors il faut prendre en compte ce terme supplémentaire dans tous les autres termes dans lesquels il intervient. Autrement dit on peut écrire

$$\begin{aligned}& \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H} + \langle A \wedge \hat{R}\rangle_Q} + \text{ termes supplémentaires} = \\ & \quad \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R} + \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A, \hat{H} + \langle A \wedge \hat{R}\rangle_Q} - \text{ termes où } \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A \text{ apparaît dans} \\ & \qquad \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R} + \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A, \hat{H} + \langle A \wedge \hat{R}\rangle_Q} + \text{termes supplémentaires.}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient en évaluant toujours sur $Z \in \Gamma(F)$

$$\begin{aligned}& \boldsymbol{\iota}_Z\big[\Psi_A(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_A(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}} \\ & \quad = \boldsymbol{\iota}_Z \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R} + \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A, \hat{H} + \langle A \wedge \hat{R}\rangle_Q} \\ & \qquad + \big\langle \bar{a}, \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Z) \big\rangle_A - \big\langle \bar{a}, \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(Y,Z) \big\rangle_Q + \boldsymbol{\iota}_Z A^\dagger\big(\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Y)\big) - \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Y) \\ & \qquad + \text{ termes supplémentaires,}\end{aligned}$$

et le terme $-\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Y)$ disparaît avec celui de couleur bleue que nous avions trouvé précédemment (puisqu'il est incorporé dans le crochet à présent), puis les termes $\big\langle \bar{a}, \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Z) \big\rangle_Q - \big\langle \bar{a}, \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(Y,Z) \big\rangle_Q$ se compensent avec les termes de couleur rouge dans (3.16) ; enfin le terme $\boldsymbol{\iota}_Z A^\dagger\big(\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A(X,Y)\big)$ permet avec les termes de couleur violette dans (3.16) et (3.17) de former la 3-forme tangentielle $\frac{1}{2}\langle A \wedge \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A\rangle_Q$ que l'on ajoutera à $\hat{H}$. Mais ce que nous avons fait pour $\mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A$ il faut le répéter pour $\frac{1}{2}[A \wedge A]_Q$ également. On obtient comme termes supplémentaires

$$\big\langle \bar{b}, [A(X), A(Z)]_Q \big\rangle_Q - \big\langle \bar{a}, [A(Y), A(Z)]_Q \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), [A(X), A(Y)]_Q \big\rangle_Q,$$

les deux premiers termes ne se compensent pas avec d'autres et le dernier permet d'ajouter à $\hat{H}$ la 3-forme tangentielle $\frac{1}{6}\big\langle A \wedge [A \wedge A]_Q \big\rangle_Q$. A présent les deux termes restants dans (3.16) correspondent à ad_A ajouté à $\hat{\nabla}$; il faut cependant retirer les termes correspondants, ce qui donne comme termes supplémentaires

$$-\big\langle [A(Z), \bar{a}]_Q, \bar{b} \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), [A(X), \bar{b}]_Q \big\rangle_Q - \big\langle A(Z), [A(Y), \bar{a}]_Q \big\rangle_Q,$$

qui ne se compensent pas avec d'autres. Finalement on obtient en prenant en compte le terme restant de couleur magenta dans (3.17)

$$\begin{aligned}
&\big[\Psi_A(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_A(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}} = \\
&\quad \Psi_A[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}+\nabla_\delta, \hat{R}+R_\delta, \hat{H}+H_\delta} \\
&\qquad + \big\langle A(Z), [\bar{a}, \bar{b}]_Q \big\rangle_Q + \big\langle \bar{b}, [A(X), A(Z)]_Q \big\rangle_Q + \big\langle \bar{a}, [A(Y), A(Z)]_Q \big\rangle_Q \\
&\qquad - \big\langle [A(Z), \bar{a}]_Q, \bar{b} \big\rangle_Q + \big\langle A(Z), [A(X), \bar{b}]_Q \big\rangle_Q - \big\langle A(Z), [A(Y), \bar{a}]_Q \big\rangle_Q,
\end{aligned}$$

où les quantités ∇_δ, R_δ et H_δ sont définies par

$$\begin{aligned}
\nabla_\delta &= \mathrm{ad}_A \\
R_\delta &= \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A + \frac{1}{2}[A \wedge A]_Q \\
H_\delta &= \langle A \wedge \hat{R} \rangle_Q + \frac{1}{2}\langle A \wedge \mathbf{d}_{\hat{\nabla}} A \rangle_Q + \frac{1}{6}\left\langle A \wedge [A \wedge A]_Q \right\rangle_Q .
\end{aligned}$$

Or les six termes restants se compensent d'après (2.5), ce qui achève la preuve. □

Lemme 3.2.6 : Soit $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ et considérons l'endomorphisme de fibré vectoriel

$$\Psi_B : F^\vee \oplus Q \oplus F \to F^\vee \oplus Q \oplus F$$

défini par (3.15). Alors de l'identité

$$\Psi_B[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\nabla, R, H} = \big[\Psi_B(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_B(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}},$$

avec $\alpha, \beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y \in \Gamma(F)$, on obtient

$$H - \hat{H} = \mathbf{d}B.$$

Preuve : Nous commençons par calculer $\big[\Psi_B(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_B(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}}$. Nous omettrons les références à $\hat{\nabla}$, $\hat{R}$, et $\hat{H}$ en indice pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
\big[\Psi_B(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_B(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big] &= \big[\alpha + B(X) \oplus \bar{a} \oplus X, \beta + B(Y) \oplus \bar{b} \oplus Y\big] \\
&= [\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y] + [B(X), Y] + [X, B(Y)]
\end{aligned}$$

Or en utilisant les opérations de Cartan il vient

$$\begin{aligned}
[B(X), Y] + [X, B(Y)] &= -\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y \boldsymbol{\iota}_X B + \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X B + \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \boldsymbol{\iota}_Y B \\
&= -\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X B - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_X B + \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X B + \boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_Y B + \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_X \boldsymbol{\iota}_Y B \\
&= -\boldsymbol{\mathscr{L}}_Y \boldsymbol{\iota}_X B + \boldsymbol{\iota}_X \boldsymbol{\mathscr{L}}_Y B - \boldsymbol{\iota}_X \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}B \\
&= \boldsymbol{\iota}_{\{X,Y\}} B - \boldsymbol{\iota}_X \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}B
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
&\big[\Psi_B(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_B(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}} \\
&\qquad = \Psi_B[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}} + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}B \\
&\qquad = \Psi_B[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}+\mathbf{d}B},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Le théorème suivant est le résultat principal sur les changements de dissections et est une conséquence directe des quatre propositions précédentes. On pourra le rapprocher de [CSX13, proposition 2.7].

Théorème 3.2.7 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier et considérons (Δ, ∇, R, H) et $(\hat{\Delta}, \hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H})$ deux dissections de $\mathcal{E}$, fournissant des isomorphismes d'algébroïdes de Courant $\Delta : \mathcal{E} \to \mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ et $\hat{\Delta} : \mathcal{E} \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$ couvrant l'identité de M. Alors le *changement de dissection* $\delta = \hat{\Delta}^{-1} \circ \Delta$ est un isomorphisme d'algébroïdes de Courant couvrant l'identité de M s'écrivant sous la forme

$$\delta(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \alpha + \boldsymbol{\iota}_X B - \frac{1}{2} A^\dagger\big(A(X)\big) - A^\dagger(\bar{a}) \oplus \tau(\bar{a}) + \tau\big(A(X)\big) \oplus X, \tag{3.18}$$

pour tous $\alpha \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a} \in \Gamma(Q)$ et $X \in \Gamma(F)$; avec $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$, $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ et $\tau \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$ couvrant l'identité. Matriciellement on a

$$\delta = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A^\dagger & B^\sharp - \frac{1}{2} A^\dagger \circ A \\ 0 & \tau & \tau \circ A \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

De plus, δ réalise la transformation

$$\nabla \mapsto \hat{\nabla} = \tau \cdot \nabla - \mathrm{ad}_{\tau \circ A}, \tag{3.20}$$

$$R \mapsto \hat{R} = \tau \circ R - \tau \circ \mathbf{d}_\nabla A + \frac{1}{2}[\tau \circ A \wedge \tau \circ A]_Q, \tag{3.21}$$

$$H \mapsto \hat{H} = H - \mathbf{d}B - \langle A \wedge R\rangle_Q + \frac{1}{2}\langle A \wedge \mathbf{d}_\nabla A\rangle_Q - \frac{1}{6}\big\langle A \wedge [A \wedge A]_Q\big\rangle_Q, \tag{3.22}$$

où l'on a posé $\tau \cdot \nabla = \tau \circ \nabla \circ \tau^{-1}$, et δ^{-1} réalise la transformation

$$\hat{\nabla} \mapsto \nabla = \tau^{-1} \cdot \hat{\nabla} + \mathrm{ad}_A, \tag{3.23}$$

$$\hat{R} \mapsto R = \tau^{-1} \circ \hat{R} + \tau^{-1} \circ \mathbf{d}_{\hat{\nabla}}(\tau \circ A) + \frac{1}{2}[A \wedge A]_Q, \tag{3.24}$$

$$\hat{H} \mapsto H = \hat{H} + \mathbf{d}B + \langle \tau \circ A \wedge \hat{R}\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle \tau \circ A \wedge \mathbf{d}_{\hat{\nabla}}(\tau \circ A)\big\rangle_Q + \frac{1}{6}\big\langle A \wedge [A \wedge A]_Q\big\rangle_Q. \tag{3.25}$$

Preuve : L'expression (3.18) est une application directe de la proposition 3.2.3. Les trois premières transformations résultent de l'application successive des lemmes 3.2.6, 3.2.5 puis 3.2.4, où de plus pour montrer (3.20) on utilise le fait que $\tau \circ \mathrm{ad}_A \circ \tau^{-1} = \mathrm{ad}_{\tau \circ A}$ et pour (3.21) le fait que $\mathbf{d}_{\nabla - \mathrm{ad}_A} = \mathbf{d}_\nabla A - [A \wedge A]_Q$. Pour montrer les trois dernières transformations on utilise les trois premières puisque $\delta^{-1} = \Psi_{\tau^{-1}} \circ \Psi_{-\tau \circ A} \circ \Psi_{-B}$. □

Exemple 3.2.8 : D'après le théorème précédent, un changement de dissection dans $\mathcal{E}_M[H]$ (voir l'exemple 2.35) correspond à effectuer $H \mapsto H - \mathbf{d}B$, pour un certain $B \in \Omega^2(M)$. On retrouve donc le contenu de la proposition 2.3.9.

Corollaire 3.2.9 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier et considérons (Δ, ∇, R, H) et $(\hat{\Delta}, \hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H})$ deux dissections de $\mathcal{E}$ ainsi que le changement de dissection $\delta = \hat{\Delta}^{-1} \circ \Delta : \mathcal{S}_M[\nabla, R, H] \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$ associé : δ est définie à partir d'éléments $\tau \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$, $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ (voir le théorème 3.2.7). Alors δ induit un isomorphisme d'algébroïdes de Lie $\bar{\delta} : \bar{\mathcal{S}}_M[\nabla, R] \to \bar{\mathcal{S}}_M[\nabla, R]$, et la relation (1.5) induit les transformations

$$\nabla \mapsto \hat{\nabla} = \tau \cdot \nabla - \mathrm{ad}_{\tau \circ A},$$
$$R \mapsto \hat{R} = \tau \circ R - \tau \circ \mathbf{d}_\nabla A + \frac{1}{2}[\tau \circ A \wedge \tau \circ A]_Q.$$

3.2.1 Deux classes caractéristiques

Ci-après nous étudions l'effet d'un changement de dissection sur deux « classes caractéristiques » associées à un algébroïde de Courant régulier : la première classe de Pontryagin et la classe de Chen-Stiénon-Xu. Fixons $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier et soit (Δ, ∇, R, H) une dissection de $\mathcal{E}$. D'après la proposition 3.1.10 et (3.8) on a $\mathbf{d}\langle R \wedge R\rangle_Q = 0$. Nous allons retrouver le fait que la classe de cohomologie dans $H^4(\mathcal{F})$ de $\langle R \wedge R\rangle_Q$ est indépendante de la dissection ; elle est connue dans la littérature ([Š00], [Bre07] et [CSX13, section 1.7]) sous le nom de *première classe de Pontryagin* $p_1(\bar{\mathcal{E}})$ de l'algébroïde de Lie quadratique $\bar{\mathcal{E}}$.

Proposition 3.2.10 : Soit (Δ, ∇, R, H) et $(\hat{\Delta}, \hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H})$ deux dissections d'un algébroïde de Courant régulier $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et considérons le changement de dissection $\delta = \hat{\Delta}^{-1} \circ \Delta : \mathcal{S}_M[\nabla, R, H] \to \mathcal{S}_M[\hat{\nabla}, \hat{R}, \hat{H}]$. Notons $\underline{\delta} : F \to F$ l'isomorphisme induit sur l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$. Alors $\underline{\delta}^{-1}$ réalise la transformation $\langle \hat{R} \wedge \hat{R}\rangle_Q \mapsto \langle R \wedge R\rangle_Q + \mathbf{d}\omega$ pour un élément $\omega \in \Omega^3(\mathcal{F})$. Par conséquent la classe de cohomologie $p_1(\bar{\mathcal{E}}) \in H^4(\mathcal{F})$ est invariante par changement de dissection dans $\mathcal{E}$.

Preuve : D'après (3.18) on a $\underline{\delta} = \mathrm{Id}_F$. Puis d'après (3.10) et (3.25) il vient

$$\underline{\delta}^\natural \langle \hat{R} \wedge \hat{R}\rangle_Q - \langle R \wedge R\rangle_Q = \langle \hat{R} \wedge \hat{R}\rangle_Q - \langle R \wedge R\rangle_Q = 2\mathbf{d}\left(\hat{H} - H\right) = -2\mathbf{d}H_\delta,$$

avec $H_\delta = \mathbf{d}B + \langle \tau \circ A \wedge \hat{R}\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle \tau \circ A \wedge \mathbf{d}_{\hat{\nabla}}(\tau \circ A)\big\rangle_Q + \frac{1}{6}\big\langle A \wedge [A \wedge A]_Q\big\rangle_Q$. □

Remarque 3.2.11 : Plus généralement, la première classe de Pontryagin d'un algébroïde de Lie quadratique $\mathcal{A} = (A \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est définie de la manière suivante. On considère la suite exacte courte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow Q = \mathrm{Ker}\,\mathsf{a} \longrightarrow A \longrightarrow F = \mathrm{Im}\,\mathsf{a} \longrightarrow 0,$$

où $Q \to M$ est un fibré en algèbres de Lie et $F \to M$ est un algébroïde de Lie $\mathcal{F}$. Un scindement $\kappa : F \to A$ de cette suite est appelé un *hoist* de $\mathcal{A}$ et la quantité $R_\kappa(X,Y) = \big[\kappa(X), \kappa(Y)\big] - \kappa\big([X,Y]\big)$ est appelée la *courbure* de κ. Alors $\langle R_\kappa \wedge R_\kappa\rangle \in \Omega^4(\mathcal{F})$ ne dépend pas du *hoist* κ (voir [CSX13, lemme 1.9]) et sa classe de cohomologie est appelée *première classe de Pontryagin* de $\mathcal{A}$. Dans [CSX13, théorème 1.10] il est montré qu'un algébroïde de Lie quadratique donné est isomorphe à l'algébroïde de Lie associé à un algébroïde de Courant régulier si et seulement si sa première classe de Pontryagin est nulle.

Nous nous tournons à présent vers la classe caractéristique de Chen-Stiénon-Xu. De manière analogue aux algébroïdes de Lie on a la notion de $\mathcal{E}$-connexion sur un fibré vectoriel $V \to M$, c'est-à-dire une application $\nabla : \Gamma(V) \to \Gamma(E^\vee \otimes V)$, notée en pratique $\nabla_u s = \iota_u \nabla s$ pour tous $u \in \Gamma(E)$ et $s \in \Gamma(V)$, qui est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en u, $\mathbb{R}$-linéaire en s et satisfaisant

$$\nabla_u(fs) = \big[\mathsf{a}(u) \cdot f\big] s + f \nabla_u s,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Soit ∇^E une $\mathcal{E}$-connexion sur $E \to M$, quelconque. On pose

$$\Xi_{\nabla^E}(u, v, w) = \left\{ \frac{1}{3} \big\langle [\![u, v]\!], w \big\rangle - \frac{1}{2} \big\langle \nabla^E_u v - \nabla^E_v u, w \big\rangle \right\} \\ + \text{permutations circulaires sur } u, v \text{ et } w,$$

pour toutes sections $u, v, w \in \Gamma(E)$, avec $[\![\cdot, \cdot]\!]$ le crochet antisymétrique associé à $[\cdot, \cdot]$ (voir la preuve de la proposition 2.2.15). Dans [AX07, section 3.2] Ξ_{∇^E} est appelée *torsion* relativement à ∇^E. Il est également montré [AX07, lemme 3.2] que $\Xi_{\nabla^E} \in \Gamma(\Lambda^3 E^\vee)$. Dans [CSX13, section 1.4] une connexion ∇^E particulière est utilisée, dépendante directement de ∇, R et H comme suit. Équipons le fibré vectoriel $F \to M$ d'une connexion ∇^F, restriction de la connexion de Levi-Civita associée à une certaine métrique riemannienne (l'existence est donnée par [Lee13, proposition 13.3]) ; on notera $\nabla^{F^\vee}$ la connexion induite sur $F^\vee \to M$. La $\mathcal{E}$-connexion sur E utilisée dans [CSX13, section 1.4] est alors

$$\nabla^E_{\alpha \oplus \bar{a} \oplus X}(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y) = \nabla^{F^\vee}_X \beta - \frac{1}{3} \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H \oplus \nabla_X \bar{b} + \frac{2}{3} [\bar{a}, \bar{b}]_Q \oplus \nabla^F_X Y.$$

Cette $\mathcal{E}$-connexion préserve le produit scalaire de $\mathcal{E}$ au sens où $\mathsf{a}(u) \cdot \langle v, w \rangle = \big\langle \nabla^E_u v, w \big\rangle + \big\langle v, \nabla^E_u w \big\rangle$ et possède une a-*torsion* nulle, c'est-à-dire $\mathsf{a}\big(\nabla^E_u v - \nabla^E_v u\big) = \big[\mathsf{a}(u), \mathsf{a}(v)\big]$. Alors on montre ([CSX13, section 3.1]) en utilisant ces deux propriétés que relativement à la dissection choisie, Ξ_{∇^E} s'écrit

$$\Xi_{\nabla^E}(\bar{a} \oplus X, \bar{b} \oplus Y, \bar{c} \oplus Z) = \frac{1}{2} \big\langle R(X, Y), \bar{c} \big\rangle_Q + \frac{1}{2} \big\langle R(Y, Z), \bar{a} \big\rangle_Q + \frac{1}{2} \big\langle R(Z, X), \bar{b} \big\rangle_Q \\ - \frac{1}{2} \big\langle [\bar{a}, \bar{b}]_Q, \bar{c} \big\rangle_Q + H(X, Y, Z). \tag{3.26}$$

Par conséquent Ξ_{∇^E} ne dépend pas de ∇^F, donc on notera $\Xi_\Delta = \Xi_{\nabla^E} \in \Omega^3(\bar{\mathcal{E}})$ en référence à la dissection choisie. On constate de plus que $[\Xi_\Delta] \in H^3(\bar{\mathcal{E}})$; en effet d'après

(3.10), (3.8), (3.6), (3.7), l'identité de Jacobi pour $[\cdot,\cdot]_Q$ et (2.5), on obtient les relations

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{d}}\Xi_\Delta(X,Y,Z,W) &= \left[\mathbf{d}H - \frac{1}{2}\langle R\wedge R\rangle_Q\right](X,Y,Z,W) = 0,\\
\bar{\mathrm{d}}\Xi_\Delta(X,Y,Z,\bar{a}) &= \frac{1}{2}\big\langle \mathbf{d}_\nabla R(X,Y,Z),\bar{a}\big\rangle_Q = 0,\\
\bar{\mathrm{d}}\Xi_\Delta(X,Y,\bar{a},\bar{b}) &= \frac{1}{2}\left\langle [R(X,Y),\bar{a}]_Q,\bar{b}\right\rangle_Q - \frac{1}{2}\left\langle R(X,Y),[\bar{a},\bar{b}]_Q\right\rangle_Q = 0,\\
\bar{\mathrm{d}}\Xi_\Delta(X,\bar{a},\bar{b},\bar{c}) &= -\frac{1}{2}\big\langle[\nabla_X\bar{a},\bar{b}]_Q,\bar{c}\big\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle[\nabla_X\bar{a},\bar{b}]_Q,\bar{c}\big\rangle_Q\\
&\quad -\frac{1}{2}\big\langle[\nabla_X\bar{b},\bar{a}]_Q,\bar{c}\big\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle[\nabla_X\bar{c},\bar{a}]_Q,\bar{b}\big\rangle_Q = 0,\\
\bar{\mathrm{d}}\Xi_\Delta(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3) &= 0,
\end{aligned}$$

où $\bar{\mathrm{d}}$ désigne la différentielle sur le complexe $\Omega^\bullet(\bar{\mathcal{E}})$ (voir section 2.7).

Exemple 3.2.12 : Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ une algèbre de Lie quadratique. Alors dans une dissection donnée, le fibré vectoriel $Q\to M$ est identifié à $\mathfrak{g}$ au-dessus d'un point et $\Xi_\Delta = \frac{1}{2}\omega_{\mathfrak{g}}$ où $\omega_{\mathfrak{g}}$ est la 3-*forme de Cartan* définie par $\omega_{\mathfrak{g}}(X,Y,Z) = \big\langle X,[Y,Z]\big\rangle$.

Exemple 3.2.13 : Soit $\mathcal{E}$ un algébroïde de Courant exact (voir l'exemple 2.35) et soit $H\in\Omega^3(M)$ la 3-forme issue d'une dissection de $\mathcal{E}$ (voir théorème 2.3.7) que l'on notera simplement Δ. Le fibré vectoriel $Q\to M$ est le fibré vectoriel nul et $\Xi_\Delta = H$.

La proposition suivante est à rapprocher de [CSX13, proposition 2.10].

Proposition 3.2.14 : Soit (Δ,∇,R,H) et $(\hat{\Delta},\hat{\nabla},\hat{R},\hat{H})$ deux dissections d'un algébroïde de Courant $\mathcal{E} = (E\to M,\mathsf{a},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$, et considérons le changement de dissection $\delta = \hat{\Delta}^{-1}\circ\Delta : \mathcal{S}_M[\nabla,R,H]\to\mathcal{S}_M[\hat{\nabla},\hat{R},\hat{H}]$. Notons $\bar{\delta}$ l'isomorphisme induit entre les algébroïdes de Lie associés. Alors $\bar{\delta}^{-1}$ réalise la transformation $\Xi_{\hat{\Delta}}\mapsto\Xi_\Delta + \bar{\mathrm{d}}\omega$ pour un élément $\omega\in\Omega^2(\bar{\mathcal{E}})$.

Preuve : D'après 3.18 on a

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}^\natural\Xi_{\hat{\Delta}}(\bar{a}\oplus X,\bar{b}\oplus Y,\bar{c}\oplus Z)\\
&\quad = \Xi_{\hat{\Delta}}\left(\bar{\delta}(\bar{a}\oplus X),\bar{\delta}(\bar{b}\oplus Y),\bar{\delta}(\bar{c}\oplus Z)\right)\\
&\quad = \Xi_{\hat{\Delta}}\Big(\tau(\bar{a})+\tau(A(X))\oplus X,\tau(\bar{b})+\tau(A(Y))\oplus Y,\tau(\bar{c})+\tau(A(Z))\oplus Z\Big).
\end{aligned}$$

A présent en utilisant les relations (3.21) et (3.22), un long calcul utilisant (2.5) pour $\mathcal{Q}$ montre que $\bar{\delta}^\natural\Xi_{\hat{\Delta}} - \Xi_\Delta = \bar{\mathrm{d}}\,(B+\omega_A)$, avec $\omega_A\in\Omega^2(\bar{\mathcal{E}})$ définie par

$$\omega_A(\bar{a}\oplus X,\bar{b}\oplus Y) = \frac{1}{2}\left[\big\langle A(X),\bar{b}\big\rangle_Q - \big\langle A(Y),\bar{a}\big\rangle_Q\right],$$

et dont la différentielle est donnée par

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{d}}\omega_A(\bar{a}\oplus X,\bar{b}\oplus Y,\bar{c}\oplus Z) &= \frac{1}{2}\Big[\big\langle\bar{a},\mathbf{d}_\nabla A(Y,Z)\big\rangle_Q - \big\langle A(X),R(Y,Z)\big\rangle_Q\\
&\quad - \big\langle A(X),[\bar{b},\bar{c}]_Q\big\rangle_Q\Big] + \text{ permutations circulaires sur } X, Y \text{ et } Z.
\end{aligned}$$

□

Définition 3.2.15 : Soit $\mathcal{E}$ un algébroïde de Courant régulier et soit (Δ, ∇, R, H) une dissection de $\mathcal{E}$. Soit $\Xi_\Delta \in \Omega^3(\bar{\mathcal{E}})$ la 3-forme (3.26), construite à l'aide d'une $\mathcal{E}$-connexion sur $E \to M$ quelconque. D'après la proposition précédente la classe de cohomologie $\mathsf{CSX}(\mathcal{E}) = [\Xi_\Delta] \in H^3(\bar{\mathcal{E}})$ est invariante par changement de dissection dans $\mathcal{E}$; on l'appellera la *classe caractéristique de Chen-Stiénon-Xu* de $\mathcal{E}$.

3.3 Structure du groupe des automorphismes forts

Fixons $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier de base une variété M. Dans cette section nous étudions le groupe des automorphismes forts $\mathbf{Aut}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$, relativement à une dissection. La nouveauté, qui a déjà pu être aperçue dans [Rub13], [BH15] et [CMTW14], est l'apparition de nouveaux automorphismes parfois appelés *champs* A, en plus des *champs* B qui étaient déjà présents dans le cas des algébroïdes de Courant exacts et *a fortiori* de la géométrie complexe généralisée (voir [Gua11]).

D'après la remarque 2.6.25, considérer uniquement des automorphismes forts est *a priori* peu restrictif par rapport à la notion d'automorphisme faible (définition 2.6.13). Rappelons que, d'après la définition 2.6.10 et la remarque 2.6.12, un automorphisme fort de l'algébroïde de Courant $\mathcal{E}$ est un automorphisme $(\varphi, \Phi) : E \to E$ du fibré vectoriel $E \to M$ satisfaisant les relations

$$\mathbf{d}\varphi \circ \mathsf{a} = \mathsf{a} \circ \Phi, \tag{3.27}$$

$$(\varphi^{-1})^*\langle u, v\rangle = \big\langle \Phi(u), \Phi(v)\big\rangle, \tag{3.28}$$

$$\Phi\big([u, v]\big) = \big[\Phi(u), \Phi(v)\big]. \tag{3.29}$$

Rappelons également que φ^* désigne l'opération tiré-en-arrière définie par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$; et que dans (3.29) Φ désigne l'application induite au niveau des modules des sections définie par $\Phi(u)_x = \Phi(u_{\varphi^{-1}(x)})$ pour tout $u \in \Gamma(E)$ et $x \in M$; ceci est possible car φ est un difféomorphisme de M.

La proposition suivante montre que la condition de compatibilité avec l'ancre (3.27) est redondante et découle des deux autres conditions (3.28) et (3.29) grâce aux relations particulières dont on dispose dans un algébroïde de Courant. Cette proposition sera utile pour calculer l'algèbre de Lie des automorphismes (forts) infinitésimaux d'un algébroïde de Courant régulier dans la section 3.4. Remarquons tout d'abord qu'étant donné un automorphisme $(\varphi, \Phi) : E \to E$ d'un fibré vectoriel $E \to M$, l'application induite $\Phi : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire puisque $\Phi : E \to E$ ne couvre pas l'identité de M ; on a cependant une relation qui remplace la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité et qui est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 : Soit $(\varphi, \Phi) : E \to E$ un automorphisme d'un fibré vectoriel $E \to M$ au-dessus d'une variété M. Alors $\Phi(fs) = \big((\varphi^{-1})^* f\big)\Phi(s)$ pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $s \in \Gamma(E)$.

Preuve : Par définition (voir remarque 2.6.12), on a pour tout point $y \in M$

$$\begin{aligned}\Phi(fs)_y &= \Phi\big((fs)_{\varphi^{-1}(y)}\big)\\ &= \Phi\big((f\circ\varphi^{-1})(y)s_{\varphi^{-1}(y)}\big)\\ &= (f\circ\varphi^{-1})(y)\Phi(s_{\varphi^{-1}(y)})\\ &= \big((\varphi^{-1})^*f\big)(y)\Phi(s)_y.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.2 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant et soit (φ,Φ) un automorphisme du fibré vectoriel $E \to M$ satisfaisant les conditions (3.28) et (3.29). Alors de plus (φ,Φ) satisfait (3.27) et est donc un automorphisme fort de $\mathcal{E}$.

Preuve : D'après le lemme 3.3.1 et les relations 2.9 et 3.29 nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\big[\Phi(u),\Phi(fv)\big] &= \Phi\big([u,fv]\big)\\ &= \Phi\big(f[u,v] + (\mathsf{a}(u)\cdot f)v\big)\\ &= (\varphi^{-1})^*f\Phi\big([u,v]\big) + (\varphi^{-1})^*\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big)\Phi(v),\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\big[\Phi(u),\Phi(fv)\big] &= \big[\Phi(u),(\varphi^{-1})^*f\Phi(v)\big]\\ &= (\varphi^{-1})^*f\big[\Phi(u),\Phi(v)\big] + \big(\mathsf{a}(\Phi(u))\cdot(\varphi^{-1})^*f\big)\,\Phi(v),\end{aligned}$$

ce qui implique la relation

$$(\varphi^{-1})^*\big(\mathsf{a}(u)\cdot f\big) = \mathsf{a}(\Phi(u))\cdot(\varphi^{-1})^*f.$$

Or, d'après le lemme 2.6.19, il vient

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})^*\boldsymbol{\iota}_{\mathsf{a}(u)}\mathbf{d}f &= \boldsymbol{\iota}_{\varphi_*\mathsf{a}(u)}(\varphi^{-1})^*\mathbf{d}f\\ &= \boldsymbol{\iota}_{\varphi_*\mathsf{a}(u)}\mathbf{d}(\varphi^{-1})^*f\\ &= \big[\varphi_*\mathsf{a}(u)\big]\cdot\big[(\varphi^{-1})^*f\big],\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la condition (3.27), d'après la notation $\varphi_* = \mathbf{d}\varphi$. En adjoignant de plus la condition (3.28), on obtient que $(\varphi,\Phi) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un automorphisme fort. □

Soit (Δ,∇,R,H) une dissection de $\mathcal{E}$ (qui est régulier). La proposition suivante assure qu'ayant fait le choix d'une dissection de $\mathcal{E}$, étudier le groupe des automorphismes forts de $\mathcal{E}$ revient à étudier les automorphismes forts de l'algébroïde de Courant standard $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M[\nabla,R,H]$ (voir théorème 3.1.13).

Proposition 3.3.3 : L'isomorphisme Δ induit un isomorphisme de groupes $\mathbf{Aut}(\mathcal{E}) \cong \mathbf{Aut}(\mathcal{S})$.

Preuve : L'isomorphisme de groupes $\mathbf{Aut}(\mathcal{E}) \to \mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ est défini par $\Phi \mapsto \Delta^{-1}\circ\Phi\circ\Delta$. Remarquons que $\Delta^{-1}\circ\Phi\circ\Delta$ est bien un automorphisme de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M[\nabla,R,H]$ car Δ est un isomorphisme d'algébroïdes de Courant au-dessus de M (voir définition 2.6.1), et que la composition d'isomorphismes forts est encore un isomorphisme fort. □

Bien qu'elle soit redondante, la condition (3.27) est importante pour les raisons suivantes. Soit $(\varphi, \Phi) : F^\vee \oplus Q \oplus F \to F^\vee \oplus Q \oplus F$ un automorphisme fort de $\mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$. Nous noterons $\varphi_* = \mathbf{d}\varphi : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ la différentielle de φ et $\varphi^* = \varphi_*^\vee : \Gamma(T^\vee M) \to \Gamma(T^\vee M)$ l'application duale, traditionnellement appelée tiré-en-arrière (*pullback* dans la littérature anglaise, voir [Lee13, chapitre 11]) ; on a la relation $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$. D'après (3.27), $\mathbf{d}\varphi$ envoie $\Gamma(F)$ dans $\Gamma(F)$, c'est-à-dire que φ est un automorphisme *feuilleté* de M (*foliated map* dans la littérature anglaise, [BDD07, section 1.1.3] et voir proposition 3.1.1 pour le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à $\mathcal{E}$) : φ laisse chaque feuille invariante. L'automorphisme (φ, φ_*) de l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ induit une application sur $\Omega^\bullet(\mathcal{F})$, que l'on pourra noter $\Lambda^\bullet\varphi^*$ (ou simplement φ^*) au lieu de $(\varphi, \varphi^*)^\natural$ (voir proposition 1.4.2).

Définition 3.3.4 : Soit $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$. On étend φ^* à $\Omega^\bullet(\mathcal{F}, Q)$ en posant $\Lambda^k(\varphi^*)(\alpha \otimes \bar{a}) = \Lambda^k(\varphi^*)\alpha \otimes \bar{a}$ pour $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{F})$ et $\bar{a} \in \Gamma(Q)$.

Définition 3.3.5 : On notera $\mathbf{O}(\mathcal{S})$ le groupe des automorphismes du fibré vectoriel $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$, orthogonaux (au sens de la relation (3.28)) pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathcal{S}$.

Proposition 3.3.6 : Soit $(\varphi, \tau) \in \mathbf{O}(Q)$, où φ est un automorphisme feuilleté de M pour $\mathcal{F}$. Alors (φ, τ) induit un élément $\Psi_{\varphi,\tau} \in \mathbf{O}(\mathcal{S})$ donné sous forme matricielle par

$$\Psi_{\varphi,\tau} = \begin{bmatrix} (\varphi^{-1})^* & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_* \end{bmatrix}.$$

Preuve : L'application $\Psi_{\varphi,\tau}$ envoie $\Gamma(F^\vee \oplus Q \oplus F)$ dans $\Gamma(F^\vee \oplus Q \oplus F)$ puisque φ_* est à valeurs dans $\Gamma(F)$, par définition d'un automorphisme feuilleté. Il s'agit bien d'un automorphisme du fibré vectoriel $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$, orthogonal pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathcal{S}$, puisque pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y \in \Gamma(F)$ on a

$$\begin{aligned} &\big\langle \Psi_{\varphi,\tau}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_{\varphi,\tau}(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y) \big\rangle \\ &\qquad = \big\langle (\varphi^*)^{-1}\alpha \oplus \tau(\bar{a}) \oplus \varphi_* X, (\varphi^*)^{-1}\beta \oplus \tau(\bar{b}) \oplus \varphi_* Y \big\rangle \\ &\qquad = (\varphi^*)^{-1}\alpha(\varphi_* Y) + (\varphi^*)^{-1}\beta(\varphi_* X) + \big\langle \tau(\bar{a}), \tau(\bar{b}) \big\rangle_Q \\ &\qquad = \alpha(\varphi_*^{-1}\varphi_* Y) + \beta(\varphi_*^{-1}\varphi_* X) + \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_Q \\ &\qquad = \langle \alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y \rangle. \end{aligned}$$

□

Définition 3.3.7 : On notera $\underline{\mathbf{O}}(\mathcal{S})$ le sous-ensemble de $\mathbf{O}(\mathcal{S})$ dont les éléments sont de la forme $\Psi_{\varphi,\tau}$ avec φ un automorphisme feuilleté de M pour $\mathcal{F}$.

Proposition 3.3.8 : L'ensemble $\underline{\mathbf{O}}(\mathcal{S})$ est un sous-groupe de $\mathbf{O}(\mathcal{S})$.

Preuve : Ceci résulte essentiellement des propriétés $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ et $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ (voir [Lee13, propositions 3.6 et 12.25]). □

Lemme 3.3.9 : Soit $(\varphi, \tau) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$. Alors on a

$$\Psi_{\varphi,\tau}[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y]_{\nabla,R,H} = \big[\Psi_{\varphi,\tau}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_{\varphi,\tau}(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla},\hat{R},\hat{H}},$$

pour tous α, $\beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in \Gamma(Q)$ et X, $Y \in \Gamma(F)$, où $\hat{\nabla}$, $\hat{R}$ et $\hat{H}$ satisfont les relations

$$(\varphi, \tau) \cdot \hat{\nabla} = \nabla, \quad (\varphi, \tau) \cdot \hat{R} = R, \quad \varphi^* \hat{H} = H,$$

où l'on a posé $(\varphi, \tau) \cdot \nabla = \varphi^*(\tau^{-1} \cdot \nabla)$ et $(\varphi, \tau) \cdot R = \varphi^*(\tau^{-1} \circ R)$ avec $\tau^{-1} \cdot \nabla = \tau^{-1} \circ \nabla \circ \tau$.

Preuve : Soit $\alpha, \beta \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $X, Y \in \Gamma(F)$. D'après (3.11), on a d'une part

$$\begin{aligned}
&\big[\Psi_{\varphi,\tau}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X), \Psi_{\varphi,\tau}(\beta \oplus \bar{b} \oplus Y)\big]_{\hat{\nabla},\hat{R},\hat{H}} \\
&\qquad = \big[(\varphi^*)^{-1}\alpha \oplus \tau(\bar{a}) \oplus \varphi_* X, (\varphi^*)^{-1}\beta \oplus \tau(\bar{b}) \oplus \varphi_* Y\big]_{\hat{\nabla},\hat{R},\hat{H}} \\
&\qquad = \boldsymbol{\mathscr{L}}_{\varphi_* X}(\varphi^*)^{-1}\beta - \boldsymbol{\iota}_{\varphi_* Y}\mathbf{d}(\varphi^*)^{-1}\alpha + \big\langle \hat{\nabla}\tau(\bar{a}), \tau(\bar{b})\big\rangle_Q \\
&\qquad\quad + \big\langle \tau(\bar{a}), \bar{\boldsymbol{\iota}}_{\varphi_* Y}\hat{R}\big\rangle_Q - \big\langle \tau(\bar{b}), \bar{\boldsymbol{\iota}}_{\varphi_* X}\hat{R}\big\rangle_Q + \boldsymbol{\iota}_{\varphi_* Y}\boldsymbol{\iota}_{\varphi_* X}\hat{H} \\
&\qquad\quad \oplus \big[\tau(\bar{a}), \tau(\bar{b})\big]_Q + \hat{\nabla}_{\varphi_* X}\tau(\bar{b}) - \hat{\nabla}_{\varphi_* Y}\tau(\bar{a}) + \hat{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y) \\
&\qquad\quad \oplus \{\varphi_* X, \varphi_* Y\},
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
&\Psi_{\varphi,\tau}\big[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y\big]_{\nabla,R,H} \\
&\qquad = (\varphi^*)^{-1}\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\beta - (\varphi^*)^{-1}\boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\alpha + (\varphi^*)^{-1}\langle \nabla\bar{a}, \bar{b}\rangle_Q \\
&\qquad\quad + (\varphi^*)^{-1}\langle \bar{a}, \bar{\boldsymbol{\iota}}_Y R\rangle_Q - (\varphi^*)^{-1}\langle \bar{b}, \bar{\boldsymbol{\iota}}_X R\rangle_Q + (\varphi^*)^{-1}\left(\boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X H\right) \\
&\qquad\quad \oplus \tau\big([\bar{a}, \bar{b}]_Q\big) + \tau\big(\nabla_X\bar{b}\big) - \tau\big(\nabla_Y\bar{a}\big) + \tau\big(R(X,Y)\big) \oplus \varphi_*\{X, Y\}.
\end{aligned}$$

Tout d'abord notons que ces deux calculs ont un sens grâce au fait que, (φ, τ) étant un automorphisme de l'algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$, φ est un automorphisme feuilleté de M pour $\mathcal{F}$, impliquant que $\varphi_* : \Gamma(F) \to \Gamma(F)$ et *a fortiori*, ceci permet d'assurer que les dérivées de Lie et produits intérieurs soient à valeur dans $\Omega^\bullet(\mathcal{F}, Q)$. Ensuite, en projetant sur $\Gamma(F)$ nous n'obtenons pas de condition puisque φ_* est un morphisme d'algèbres de Lie (voir [Lee13, corollaire 8.31]). En projetant sur $\Gamma(Q)$ on obtient deux conditions : $\varphi^*(\tau^{-1} \circ \hat{R}) = R$ et $\tau^{-1} \circ \hat{\nabla}_{\varphi_* X} \circ \tau = \nabla_X$. A présent en projetant sur $\Gamma(F^\vee)$, le lemme 2.6.19 et les deux conditions précédentes permettent d'infirmer l'existence de nouvelles conditions excepté sur les 3-formes H et $\hat{H}$: pour tout $Z \in \Gamma(F)$ on a d'une part

$$(\boldsymbol{\iota}_{\varphi_* Y}\boldsymbol{\iota}_{\varphi_* X}\hat{H})(Z) = \hat{H}(\varphi_* X, \varphi_* Y, Z) = (\varphi^*\hat{H})(X, Y, \varphi_*^{-1}Z),$$

et d'autre part

$$\big[(\varphi^*)^{-1}\boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X H\big](Z) = (\boldsymbol{\iota}_Y\boldsymbol{\iota}_X H)(\varphi_*^{-1}Z) = H(X, Y, \varphi_*^{-1}Z),$$

d'où la dernière condition, $\varphi^*\hat{H} = H$. □

Définition 3.3.10 : On notera $\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ le sous-groupe des éléments de $\mathbf{O}(\mathcal{S})$, qui couvrent l'identité de M et agissent selon l'identité sur $Q \to M$. On appelera $\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ *groupe de jauge* de l'algébroïde de Courant $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$.

Proposition 3.3.11 : Tout élément $\Psi \in \mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ peut s'écrire $\Psi = \Psi_A \circ \Psi_B$ où $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$. On notera $\Psi = (A, B)$ et matriciellement on peut écrire

$$(A,B) = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A^\dagger & B^\sharp - \frac{1}{2}A^\dagger \circ A \\ 0 & \mathrm{Id} & A \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

La loi de groupe sur $\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ est alors donnée par

$$(A,B) \circ (A', B') = \left(A + A', B + B' + \frac{1}{2}\langle A \wedge A' \rangle_Q \right),$$

l'élément neutre est $(0,0)$ et l'inverse de (A, B) est

$$(A,B)^{-1} = (-A, -B). \tag{3.30}$$

Preuve : La preuve de l'existence d'une décomposition $\Psi = \Psi_A \circ \Psi_B$ est analogue à la preuve de la proposition 3.2.3. En utilisant la formulation matricielle on obtient

$$(A,B) \circ (A', B') = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A'^\dagger - A^\dagger & B'^\sharp - \frac{1}{2}A'^\dagger \circ A' - A^\dagger \circ A' + B^\sharp - \frac{1}{2}A^\dagger \circ A \\ 0 & \mathrm{Id} & A' + A \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}.$$

Or, on calcule que

$$\begin{aligned} &B'^\sharp - \frac{1}{2}A'^\dagger \circ A' - A^\dagger \circ A' + B^\sharp - \frac{1}{2}A^\dagger \circ A \\ &\qquad = B^\sharp + B'^\sharp + \frac{1}{2}\langle A \wedge A' \rangle_Q^\sharp - \frac{1}{2}\langle A \wedge A' \rangle_Q^\sharp - \frac{1}{2}A'^\dagger \circ A' - A^\dagger \circ A' - \frac{1}{2}A^\dagger \circ A, \end{aligned}$$

et pour tous X et $Y \in \Gamma(F)$ on calcule que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}&\langle A \wedge A' \rangle_Q(X,Y) - A^\dagger\big(A'(X)\big)(Y) \\ &= -\frac{1}{2}\big\langle A(X), A'(Y)\big\rangle_Q + \frac{1}{2}\big\langle A(Y), A'(X)\big\rangle_Q - \big\langle A(Y), A'(X)\big\rangle_Q \\ &= -\frac{1}{2}\big\langle A'(Y), A(X)\big\rangle_Q - \frac{1}{2}\big\langle A(Y), A'(X)\big\rangle_Q \\ &= -\frac{1}{2}A'^\dagger\big(A(X)\big)(Y) - \frac{1}{2}A^\dagger\big(A'(X)\big)(Y), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$B'^\sharp - \frac{1}{2}A'^\dagger \circ A' - A^\dagger A' + B^\sharp - \frac{1}{2}A^\dagger \circ A = B^\sharp + B'^\sharp + \frac{1}{2}\langle A \wedge A' \rangle_Q^\sharp - \frac{1}{2}(A + A')^\dagger \circ (A + A'),$$

et par conséquent on aboutit à

$$(A,B) \circ (A', B') = \left(A + A', B + B' + \frac{1}{2}\langle A \wedge A' \rangle_Q \right).$$

L'élément neutre et l'inverse d'un élément (A, B) s'obtiennent directement à partir de la relation ci-dessus. □

Remarque 3.3.12 : Le groupe $\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ n'est pas abélien car l'opération $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire $\langle \cdot \wedge \cdot \rangle_Q$ n'est pas commutative sur $\Omega^1(\mathcal{F}, Q)$, mais commutative $\mathbb{Z}$-graduée, voir proposition 3.1.5. D'autre part $\Omega^2(\mathcal{F})$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$ puisque

$$(A', B') \circ (0, B) \circ (A', B')^{-1} = (A', B + B') \circ (-A', -B') = (0, B),$$

pour tous $A' \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $B, B' \in \Omega^2(\mathcal{F})$.

Lemme 3.3.13 : Soit $(\varphi, \Phi) \in \mathbf{O}(\mathcal{S})$ tel que $\Phi\big|_Q = \tau$ avec $(\varphi, \tau) \in \mathbf{O}(Q)$. Alors $\Phi = \Psi_{\varphi,\tau} \circ \Psi$, avec $\Psi \in \mathbf{Gau}(\mathcal{S})$.

Preuve : Posons $\Psi = \Psi_{\varphi,\tau}^{-1} \circ \Phi = \Psi_{\varphi^{-1},\tau^{-1}} \circ \Phi$. Puisque $\Psi_{\varphi^{-1},\tau^{-1}} \in \mathbf{O}(\mathcal{S})$ couvre φ^{-1}, $\Psi \in \mathbf{O}(\mathcal{S})$ couvre Id_M. De même, $\Psi_{\varphi^{-1},\tau^{-1}}\big|_Q = \tau^{-1}$ et par hypothèse $\Phi\big|_Q = \tau$ donc $\Psi\big|_Q = \mathrm{Id}_Q$ et par conséquent $\Psi \in \mathbf{Gau}(\mathcal{S})$. □

Lemme 3.3.14 : Soit $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ et soit $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$. Alors $B^\sharp \circ \varphi_* = (\varphi^*)^{-1}\big(\varphi^* B\big)^\sharp$.

Preuve : Pour tous $X, Y \in \Gamma(F)$ on a

$$\begin{aligned}(B^\sharp \circ \varphi_*)(X)(Y) &= B(\varphi_* X, Y) \\ &= (\varphi^* B)(X, \varphi_*^{-1} Y) \\ &= \big(\varphi^* B\big)^\sharp (X)(\varphi_*^{-1} Y) \\ &= (\varphi^*)^{-1} \left(\big(\varphi^* B\big)^\sharp (X)\right)(Y).\end{aligned}$$

□

Définition 3.3.15 : Soit $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$. Pour $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$, on a $A^\dagger : \Gamma(Q) \to \Gamma(F^\vee)$ (voir définition 3.2.1). On définit $\varphi^* A^\dagger$ par $(\varphi^* A^\dagger)(\bar{a}) = \varphi^* \left[A^\dagger(\bar{a})\right]$, pour tout $\bar{a} \in \Gamma(Q)$. De même, pour $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$, on a $B^\sharp : \Gamma(F) \to \Gamma(F^\vee)$. On définit $\varphi^* B^\sharp$ par $(\varphi^* B^\sharp)(X) = \varphi^* \left[B^\sharp(X)\right]$, pour tout $X \in \Gamma(F)$.

Théorème 3.3.16 : Tout élément $(\varphi, \Phi) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ peut s'écrire sous la forme $\Phi = \Psi_{\varphi,\tau} \circ \Psi_A \circ \Psi_B$ avec $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$, $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ et $\tau \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$ satisfaisant les conditions

$$\nabla - (\varphi, \tau) \cdot \nabla = \mathrm{ad}_A, \tag{3.31}$$

$$R - (\varphi, \tau) \cdot R = \mathbf{d}_\nabla A - \frac{1}{2}[A \wedge A]_Q, \tag{3.32}$$

$$H - \varphi^* H = \mathbf{d}B + \big\langle A \wedge R \big\rangle_Q - \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{d}_\nabla A \wedge A \right\rangle_Q + \frac{1}{6} \big\langle A \wedge [A \wedge A]_Q \big\rangle_Q. \tag{3.33}$$

On notera $(\varphi, \Phi) = (\varphi, \tau, A, B)$ et matriciellement on peut écrire

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\varphi^*)^{-1} & -(\varphi^{-1})^* A^\dagger & (\varphi^{-1})^* B^\sharp - \frac{1}{2}(\varphi^{-1})^* A^\dagger \circ A \\ 0 & \tau & \tau \circ A \\ 0 & 0 & \varphi_* \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

La loi de groupe sur $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}(\varphi,\tau, A, B) &\circ (\varphi', \tau', A', B') \\ &= \left(\varphi \circ \varphi', \tau \circ \tau', \varphi'^*(\tau'^{-1} \circ A) + A', \varphi'^* B + B' + \frac{1}{2}\langle \varphi'^*(\tau'^{-1} \circ A) \wedge A' \rangle_Q \right),\end{aligned} \tag{3.35}$$

l'élément neutre est $(\mathrm{Id}_M, \mathrm{Id}_Q, 0, 0)$ et l'inverse de (φ, τ, A, B) est

$$(\varphi, \tau, A, B)^{-1} = \left(\varphi^{-1}, \tau^{-1}, -(\varphi^{-1})^*(\tau \circ A), -(\varphi^{-1})^* B\right). \tag{3.36}$$

Preuve : D'après le lemme 3.3.13, $\Phi = \Psi_{\varphi,\tau} \circ \Psi$, avec $\Psi \in \mathbf{Gau}(\mathcal{S})$. Or d'après la proposition 3.3.11, il existe $A \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $B \in \Omega^2(\mathcal{F})$ tels que $\Psi = \Psi_A \circ \Psi_B$. Les conditions auxquelles sont contraints φ, τ, A et B proviennent d'une utilisation successive des lemmes 3.2.6, 3.2.5 et enfin de 3.3.9. La loi de groupe (3.35) est obtenue à partir de l'écriture matricielle (3.34), de manière analogue à la preuve de la proposition 3.3.11. □

Alternativement, on peut reformuler le théorème précédent comme suit.

Proposition 3.3.17 : Le groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ est le sous-groupe constitué des éléments du produit semi-direct $\underline{\mathbf{O}}(\mathcal{S}) \ltimes_\theta \mathbf{Gau}(\mathcal{S})$, qui s'écrivent (φ, τ, A, B), tels que $\tau \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$ et φ, τ, A et B satisfont les relations (3.31), (3.31) et (3.33), où l'action (à droite) $\theta : \underline{\mathbf{O}}(\mathcal{S}) \to \mathbf{Aut}\left[\mathbf{Gau}(\mathcal{S})\right]$ est définie par

$$\theta\left(\Psi_{\varphi,\tau}\right)(A, B) = \left(\varphi^*(\tau^{-1} \circ A), \varphi^* B\right).$$

3.4 Structure de l'algèbre de Lie des automorphismes forts infinitésimaux

Fixons dans toute cette section $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un algébroïde de Courant régulier. Nous allons dans un premier temps étudier la version « infinitésimale » du groupe des automorphismes forts $\mathbf{Aut}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$. Par la suite nous répétons cette étude relativement à une dissection. Pour cela, nous considérons les générateurs infinitésimaux d'un groupe à un paramètre d'automorphismes forts dans l'algébroïde de Courant. Nous montrons plus loin que ces générateurs infinitésimaux possèdent plusieurs propriétés, déjà énoncées dans [BH15] et [BCG07], et que de plus ils forment une algèbre de Lie. L'utilisation ultérieure d'une dissection permet d'expliciter la structure de cette algèbre de Lie.

Dans ce qui suit nous noterons $\mathbf{Aut}(E)$ le groupe des automorphismes d'un fibré vectoriel $E \to M$ au-dessus d'une variété M.

Définition 3.4.1 : Soit $E \to M$ un fibré vectoriel au-dessus d'une variété M. Soit $(\varphi_t, \Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(E)$ *lisse*, c'est-à-dire la donnée d'un morphisme de groupes $t \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi_t, \Phi_t) \in \mathbf{Aut}(E)$ pour lequel $X \in \Gamma(TM)$ et $D \in \mathrm{End}\left[\Gamma(E)\right]$, définis par

$$X \cdot f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* f\Big|_{t=0}, \quad D(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(s)\Big|_{t=0},$$

existent pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $s \in \Gamma(E)$. On pourra noter X_D pour le champ de vecteurs X lorsque seul D est explicité, et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tD) \in \mathbf{Aut}(E)$ pour le groupe à un paramètre $(\varphi_t, \Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathbf{Aut}(E)$ associé à (X, D) ; le couple (X, D) sera appelé *générateur infinitésimal* de $(\varphi_t, \Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Dans la définition précédente, on constate que X est le champ de vecteurs sur M associé au groupe à un paramètre de difféomorphismes $(\varphi_t^{-1})_{t\in\mathbb{R}}$ de M ([Lee13, proposition 9.7]).

Proposition 3.4.2 : Soit $\mathcal{E} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier et soit $(\varphi_t, \Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(\mathcal{E})$. En particulier, $(\varphi_t, \Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(E)$, notons (X, D) le générateur infinitésimal associé, au sens de la définition précédente. Alors X est $\mathcal{F}$-projetable (voir [Ton97, chapitre 1]) et les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$D(fu) = fD(u) + (X \cdot f)u, \tag{3.37}$$
$$D\big([u,v]\big) = \big[D(u), v\big] + \big[u, D(v)\big], \tag{3.38}$$
$$X \cdot \langle u, v\rangle = \big\langle D(u), v\big\rangle + \big\langle u, D(v)\big\rangle, \tag{3.39}$$

pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, et $u, v \in \Gamma(E)$.

Preuve : On a vu dans la section 3.3 que pour tout $t \in \mathbb{R}$, (φ_t, Φ_t) étant un automorphisme fort de $\mathcal{E}$, la relation (3.27) implique que φ_t est un automorphisme feuilleté de M. Par conséquent le générateur infinitésimal associé est un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ $\mathcal{F}$-projetable, c'est-à-dire satisfaisant la propriété $[X, V] \in \Gamma(F)$ pour tout $V \in \Gamma(F)$. En effet, φ_t étant feuilleté on a $(\varphi_t)_* : \Gamma(F) \to \Gamma(F)$ et par conséquent pour tout $V \in \Gamma(F)$ on a

$$[X, V] = \mathscr{L}_X V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_{-t}^{-1})_*(V)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t)_*(V)\Big|_{t=0} \in \Gamma(F).$$

A présent, par définition et d'après le lemme 3.3.1 il vient

$$\begin{aligned}
D(fu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(fu)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\varphi_t^{-1})^* f\Phi_t(u)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* f\right)\Phi_t(u)\right]\Big|_{t=0} + \left[(\varphi_t^{-1})^* f\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(u)\right)\right]\Big|_{t=0} \\
&= (X \cdot f)u + fD(u),
\end{aligned}$$

on obtient donc la première propriété. La seconde propriété est établie à partir de la bilinéarité du crochet $[\cdot,\cdot]$ et la condition (3.29) puisque d'une part par définition

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t\big([u,v]\big)\Big|_{t=0} = D\big([u,v]\big),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t\big([u,v]\big)\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\Phi_t(u),\Phi_t(v)\big]\Big|_{t=0}\\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(u)\Big|_{t=0}, v\right] + \left[u, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(v)\Big|_{t=0}\right]\\ &= \big[D(u),v\big] + \big[u,D(v)\big].\end{aligned}$$

Enfin la troisième propriété est obtenue à partir de la bilinéarité du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la condition (3.28), puisque d'une part, par définition,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^*\langle u,v\rangle\Big|_{t=0} = X\cdot\langle u,v\rangle,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\langle\Phi_t(u),\Phi_t(v)\big\rangle\Big|_{t=0} &= \left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(u)\Big|_{t=0}, v\right\rangle + \left\langle u, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(v)\Big|_{t=0}\right\rangle\\ &= \big\langle D(u),v\big\rangle + \big\langle u,D(v)\big\rangle.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.3 : La propriété (3.37), qui provient du fait que (φ,Φ) est un automorphisme du fibré vectoriel $E\to M$, est une propriété que possède tout automorphisme infinitésimal (X,D) de fibré vectoriel. Dans [KSM02, définition 1.1], le couple (X,D) est également appelé *derivative endomorphism* de $\Gamma(E)$ en anglais.

Définition 3.4.4 : Soit $\mathcal{E}=(E\to M,\mathsf{a},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier. Tout couple $(X,D)\in\Gamma(TM)\times\operatorname{End}\Gamma(E)$ tel que X soit $\mathcal{F}$-projetable, et tels que (X,D) satisfait les relations (3.37), (3.38) et (3.39), est appelé *automorphisme infinitésimal fort* de $\mathcal{E}$. On désignera par $\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$ l'ensemble de tous les automorphismes infinitésimaux forts de $\mathcal{E}$.

Proposition 3.4.5 : Soit $\mathcal{E}=(E\to M,\mathsf{a},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant régulier. Alors $\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$ admet une structure d'algèbre de Lie $[\![\cdot,\cdot]\!]$ définie par

$$[\![(X,D),(X',D')]\!] = \big(\{X,X'\},[D,D']\big),$$

avec $\{\cdot,\cdot\}$ le crochet de Lie des champs de vecteurs et $[\cdot,\cdot]$ le commutateur sur $\operatorname{End}\Gamma(E)$. De plus on dispose de la relation $X_{[D,D']}=\{X,X'\}$ pour tous $(X,D),(X',D')\in\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$ (voir définition 3.4.1 pour la notation).

Preuve : Soit (X,D), $(X',D')\in\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$, deux générateurs infinitésimaux de groupes à un paramètre d'automorphismes forts de $\mathcal{E}$. Nous devons vérifier que $[\![\cdot,\cdot]\!]$ est bien défini, c'est-à-dire que $[\![(X,D),(X',D')]\!]$ est bien un élément de $\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$ puisque l'on sait déjà que l'antisymétrie et l'identité de Jacobi sont vérifiées. Tout d'abord, $\{X,X'\}$ est bien un champ de vecteurs $\mathcal{F}$-projetable d'après l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie des champs de vecteurs sur M. Puis la relation (3.38) stipule que D et D' sont des dérivations de $(\Gamma(E),[\cdot,\cdot])$ donc leur commutateur est encore une dérivation ([Gre75, section 5.6]) ; on obtient ainsi que la propriété (3.38) est satisfaite. Concernant (3.37), on a, pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $u \in \Gamma(E)$,

$$\begin{aligned}(D \circ D' - D' \circ D)(fu) &= D\big\{(X' \cdot f)u + fD'(u)\big\} - D'\big\{(X \cdot f)u + fD(u)\big\} \\ &= (X \cdot X' \cdot f)u + (X' \cdot f)D(u) + fD \circ D'(u) + (X \cdot f)D'(u) \\ &\quad - fD' \circ D(u) - (X' \cdot f)D(u) - (X' \cdot X \cdot f)u - (X \cdot f)D'(u) \\ &= (\{X, X'\} \cdot f)u + f[D, D'](u),\end{aligned}$$

et de cette relation il vient que $X_{[D,D']} = \{X, X'\}$. Enfin pour la propriété (3.39) on a

$$\begin{aligned}\{X, X'\} \cdot \langle u, v\rangle &= X \cdot X' \cdot \langle u, v\rangle - X' \cdot X \cdot \langle u, v\rangle \\ &= X \cdot \Big\{\big\langle D'(u), v\big\rangle + \big\langle u, D'(v)\big\rangle\Big\} - X' \cdot \Big\{\big\langle D(u), v\big\rangle + \big\langle u, D(v)\big\rangle\Big\} \\ &= \big\langle D \circ D'(u), v\big\rangle + \big\langle D'(u), D(v)\big\rangle + \big\langle D(u), D'(v)\big\rangle + \big\langle u, D \circ D'(v)\big\rangle \\ &\quad - \big\langle D' \circ D(u), v\big\rangle - \big\langle D(u), D'(v)\big\rangle - \big\langle D'(u), D(v)\big\rangle - \big\langle u, D' \circ Dv\big\rangle \\ &= \big\langle (D \circ D' - D' \circ D)(u), v\big\rangle + \big\langle u, (D \circ D' - D' \circ D)(v)\big\rangle \\ &= \big\langle [D, D'](u), v\big\rangle + \big\langle u, [D, D'](v)\big\rangle,\end{aligned}$$

pour toutes section $u, v \in \Gamma(E)$. □

A présent, soit (Δ, ∇, R, H) une dissection de l'algébroïde de Courant régulier $\mathcal{E}$ et soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M[\nabla, R, H]$ l'algébroïde de Courant standard associé. Nous allons décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{aut}(S)$ des automorphismes forts infinitésimaux de $\mathcal{S}$, et d'après la proposition suivante, cela est suffisant pour décrire $\mathfrak{aut}(\mathcal{E})$, relativement à la dissection choisie.

Proposition 3.4.6 : L'isomorphisme Δ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{aut}(\mathcal{E}) \cong \mathfrak{aut}(\mathcal{S})$.

Preuve : L'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{aut}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{aut}(\mathcal{S})$ est défini par $D \mapsto \Delta^{-1} \circ D \circ \Delta$. Remarquons que $\Delta^{-1} \circ D \circ \Delta$ est une dérivation de $(\Gamma(F^\vee \oplus Q \oplus F), [\cdot,\cdot])$ car Δ est un isomorphisme d'algébroïdes de Courant au-dessus de M. □

Lemme 3.4.7 : Soit $(\varphi_t, \tau_t, A_t, B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ lisse, c'est-à-dire la donnée d'un morphisme de groupes $t \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi_t, \tau_t, A_t, B_t) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ pour lequel il existe un générateur infinitésimal (X, Θ) du groupe à un paramètre $(\varphi_t, \tau_t) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$ et tel que $t \mapsto A_t$ et $t \mapsto B_t$ soient des applications lisses. Alors il existe $a \in \Omega^1(\mathcal{F}, Q)$ et $b \in \Omega^2(\mathcal{F})$ tels que

$$A_t = \int_0^t \varphi_s^*(\tau_{-s} \circ a)\,\mathrm{d}s \;\text{ et }\; B_t = \int_0^t \left(\varphi_s^* b + \frac{1}{2}\big\langle \varphi_s^*(\tau_{-s} \circ a) \wedge A_s\big\rangle_Q\right)\mathrm{d}s.$$

et les relations suivantes soient satisfaites :

$$\Theta(f\bar{a}) = f\Theta(\bar{a}) + (X \cdot f)\bar{a}, \tag{3.40}$$

$$X \cdot \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle = \big\langle \Theta(\bar{a}), \bar{b}\big\rangle_Q + \big\langle \bar{a}, \Theta(\bar{b})\big\rangle_Q, \tag{3.41}$$

$$\Theta\big([\bar{a}, \bar{b}]_Q\big) = \big[\Theta(\bar{a}), \bar{b}\big]_Q + \big[\bar{a}, \Theta(\bar{b})\big]_Q, \tag{3.42}$$

$$[\Theta, \nabla_U] - \nabla_{\{X,U\}} = \mathrm{ad}_a, \tag{3.43}$$

$$\Theta \circ R - \overline{\mathscr{L}}_X R = \mathbf{d}_\nabla a, \tag{3.44}$$

$$\mathscr{L}_X H + \mathbf{d}b + \langle a \wedge R\rangle_Q = 0, \tag{3.45}$$

pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma(Q)$ et $U \in \Gamma(F)$. On dira que (X, Θ, a, b) est le *générateur infinitésimal* associé au groupe à un paramètre $(\varphi_t, \tau_t, A_t, B_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve : L'existence d'un générateur infinitésimal (X, Θ) pour le groupe à un paramètre $(\varphi_t, \tau_t) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{Q})$ assure directement que les relations (3.40), (3.41) et (3.42) sont satisfaites d'après la proposition 3.4.2. Ensuite, par définition d'un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$, on a de plus pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ que

$$\varphi_t^*(\tau_t^{-1} \circ A_s) + A_t = A_{s+t}, \tag{3.46}$$

$$\varphi_t^* B_s + B_t + \frac{1}{2}\big\langle \varphi_t(\tau_t^{-1} \circ A_s) \wedge A_t \big\rangle_Q = B_{s+t}, \tag{3.47}$$

De la relation (3.46) il vient

$$\varphi_t^*\left(\tau_t^{-1} \circ \frac{1}{s} \circ A_s\right) = \frac{1}{s}(A_{s+t} - A_t),$$

ce qui donne la relation $\varphi_t^*(\tau_t^{-1} \circ a) = \dot{A}_t$, après passage à la limite lorsque s tend vers 0, où $a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t\big|_{t=0}$ et le point désigne la dérivation par rapport au paramètre t. On obtient ainsi avec la condition initiale $A_0 = 0$ que

$$A_t = \int_0^t \varphi_s^*(\tau_{-s} \circ a)\, \mathrm{d}s.$$

Enfin de la relation (3.47) il vient

$$\frac{1}{s}(B_{s+t} - B_t) = \varphi_t^*\left(\frac{1}{s} B_s\right) + \frac{1}{2}\left\langle \varphi_t^*\left(\tau_t^{-1} \circ \frac{1}{s} A_s\right) \wedge A_t \right\rangle_Q,$$

ce qui donne la relation $\dot{B}_t = \varphi_t^* b + \frac{1}{2}\big\langle \varphi_t^*(\tau_t^{-1} \circ a) \wedge A_t \big\rangle_Q$, où $b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_t\big|_{t=0}$; par conséquent on obtient avec la condition initiale $B_0 = 0$ que

$$B_t = \int_0^t \left(\varphi_s^* b + \frac{1}{2}\big\langle \varphi_s^*(\tau_t^{-1} \circ a) \wedge A_s \big\rangle_Q \right) \mathrm{d}s.$$

Notons que le passage à la limite $s \to 0$ ci-dessus requiert la continuité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ pour une topologie sur $\Gamma(Q)$ (voir par exemple [Joy00, section 1.2]). Les relations (3.43), (3.44) et (3.45) s'obtiennent directement en dérivant les relations (3.31), (3.32) et (3.33) par rapport au paramètre t et en se rappelant que $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$, $\tau_0 = \mathrm{Id}_Q$, $A_0 = 0$, et $B_0 = 0$. $\square$

Lemme 3.4.8 : Soit (X, Θ, a, b) le générateur infinitésimal de $(\varphi_t, A_t, B_t, \tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre dans $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$. Alors (X, Θ, a, b) est la dérivation de $(\Gamma(F^\vee \oplus Q \oplus F), [\cdot, \cdot])$ qui agit selon

$$(X, \Theta, a, b)(\xi \oplus \bar{x} \oplus U) = \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \xi - a^\dagger(\bar{x}) + \boldsymbol{\iota}_U b \oplus \Theta(\bar{x}) + a(U) \oplus \boldsymbol{\mathscr{L}}_X U, \tag{3.48}$$

pour tous $\xi \in \Gamma(F^\vee)$, $\bar{x} \in \Gamma(Q)$ et $U \in \Gamma(F)$.

Preuve : Le fait que (X,Θ,a,b) soit une dérivation de $(\Gamma(F^\vee\oplus Q\oplus F),[\cdot,\cdot])$ provient de la propriété (3.38) puisque (X,Θ,a,b) est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'automorphismes forts de l'algébroïde de Courant standard $\mathcal{S}$. L'action de (X,Θ,a,b) sur une section $\xi\oplus\bar{x}\oplus U$ du fibré vectoriel $F^\vee\oplus Q\oplus F\to M$ est donnée par

$$(X,\Theta,a,b)(\xi\oplus\bar{x}\oplus U)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t,\tau_t,A_t,B_t)(\xi\oplus\bar{x}\oplus U)\Big|_{t=0},$$

il s'agit donc de calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}(\varphi_t^{-1})^*\xi-(\varphi_t^{-1})^*A_t^\dagger(\bar{x})+\boldsymbol{\iota}_U(\varphi_t^{-1})^*B_t^\sharp-\frac{1}{2}(\varphi_t^{-1})^*A_t^\dagger\big(A_t(U)\big)\\ \tau_t(\bar{x})+\tau_t\circ A_t(U)\\ (\varphi_t)_*(U)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}.$$

On obtient, en utilisant la $\mathbb{R}$-bilinéarité des opérations intervenant dans les second et troisième termes de la première ligne ci-dessus, ainsi qu'en revenant à la définition de $A^\dagger$ (voir définition 3.2.1) pour le quatrième terme,

$$(X,\Theta,a,b)(\xi\oplus\bar{x}\oplus U)=\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\xi-a^\dagger(\bar{x})+\boldsymbol{\iota}_Ub\oplus\Theta(\bar{x})+a(U)\oplus\boldsymbol{\mathscr{L}}_XU,\tag{3.49}$$

où l'on a utilisé [Lee13, chapitre 9, équation 9.16] et [Lee13, chapitre 12, équation 12.8] pour les définitions des dérivées de Lie. □

Définition 3.4.9 : Soit $(X,\Theta)\in\Gamma(F)\times\operatorname{End}\Gamma(Q)$ un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{Q}$, et soit $(a,b)\in\Omega^1(\mathcal{F},Q)\times\Omega^2(\mathcal{F})$ tel que relations (3.43), (3.44) et (3.45) soient satisfaites. Alors la dérivation (X,Θ,a,b) de $(\Gamma(F^\vee\oplus Q\oplus F),[\cdot,\cdot])$ définie par (3.48) est appelée automorphisme fort infinitésimal de $\mathcal{S}$. L'ensemble des automorphismes forts infinitésimaux de $\mathcal{S}$ sera noté $\mathfrak{aut}(\mathcal{S})$.

Théorème 3.4.10 : L'ensemble $\mathfrak{aut}(\mathcal{S})$ possède une structure d'algèbre de Lie, héritée de l'algèbre de Lie des dérivations de $(\Gamma(F^\vee\oplus Q\oplus F),[\cdot,\cdot])$, et donnée par

$$\begin{aligned}&[\![(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')]\!]\\&\quad=\left(\{X,X'\},[\Theta,\Theta'],\Theta\circ a'-\Theta'\circ a+\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_Xa'-\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_{X'}a,\boldsymbol{\mathscr{L}}_Xb'-\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}b+\langle a\wedge a'\rangle_Q\right),\end{aligned}$$

où l'opération $a\in\Omega^k(\mathcal{F},Q)\mapsto\Theta\circ a\in\Omega^k(\mathcal{F},Q)$, pour tout $\Theta\in\operatorname{End}\Gamma(Q)$ est définie sur les tenseurs élémentaires par $\Theta(\omega\otimes\bar{a})=\omega\otimes\Theta(\bar{a})$, pour tous $\omega\in\Omega^k(\mathcal{F})$ et $\bar{a}\in\Gamma(F)$.

Preuve : Nous avons par définition pour tous $\xi\in\Gamma(F^\vee)$, $\bar{x}\in\Gamma(Q)$ et $U\in\Gamma(F)$ que

$$\begin{aligned}&[\![(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')]\!](\xi\oplus\bar{x}\oplus U)\\&\quad=(X,a,b,\Theta)\circ(X',a',b',\Theta')(\xi\oplus\bar{x}\oplus U)-(X',a',b',\Theta')\circ(X,a,b,\Theta)(\xi\oplus\bar{x}\oplus U),\end{aligned}$$

et le terme de droite vaut, en développant,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\{X,X'\}}\xi-\boldsymbol{\mathscr{L}}_Xa'^\dagger(\bar{x})+\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}a^\dagger(\bar{x})+\boldsymbol{\mathscr{L}}_X\boldsymbol{\iota}_Ub'-\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}\boldsymbol{\iota}_Ub-a^\dagger\big(\Theta'(\bar{x})\big)-a^\dagger\big(a'(U)\big)\\&\quad+a'^\dagger\big(\Theta(\bar{x})\big)+a'^\dagger\big(a(U)\big)+\boldsymbol{\iota}_{\{X',U\}}b-\boldsymbol{\iota}_{\{X,U\}}b'\oplus[\Theta,\Theta'](\bar{x})\\&\quad+\Theta\big(a'(U)\big)-\Theta'\big(a(U)\big)+\bar{\boldsymbol{\iota}}_{\{X',U\}}a-\bar{\boldsymbol{\iota}}_{\{X,U\}}a'\oplus\boldsymbol{\mathscr{L}}_{\{X,X'\}}U.\end{aligned}$$

Les termes de couleur bleue montrent que la projection de $\llbracket(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')\rrbracket$ sur $\Gamma(TM)$ est $\{X,X'\}$, qui est bien $\mathcal{F}$-projetable d'après l'identité de Jacobi. Le terme de couleur verte montre que la projection de $\llbracket(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')\rrbracket$ sur $\Gamma(\mathcal{Q})$ est $[\Theta,\Theta']$, pour le commutateur des dérivations. Les termes de couleur orange montrent que la projection de $\llbracket(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')\rrbracket$ sur $\Omega^2(\mathcal{F})$ est $\boldsymbol{\mathscr{L}}_X b' - \boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'} b + \langle a\wedge a'\rangle_Q$. Il reste à identifier les termes de couleur rouge. Pour cela supposons que a est élémentaire, c'est-à-dire posons $a=\omega\otimes\bar{a}$, avec $\omega\in\Gamma(F^\vee)$ et $\bar{a}\in\Gamma(Q)$. D'après (3.39) on a

$$\Theta'\big(a(U)\big)=\Theta'\big(\omega(U)\bar{a}\big)=\big(\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}\boldsymbol{\iota}_U\omega\big)\bar{a}+\omega(U)\Theta'(\bar{a}),$$

et on a également que

$$\bar{\boldsymbol{\iota}}_{\{X',U\}}a=\big(\boldsymbol{\iota}_{\{X',U\}}\omega\big)\otimes\bar{a}=(\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}\boldsymbol{\iota}_U\omega-\boldsymbol{\iota}_U\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}\omega)\otimes\bar{a}=\big(\boldsymbol{\mathscr{L}}_{X'}\boldsymbol{\iota}_U\omega\big)\bar{a}-\bar{\boldsymbol{\iota}}_U\left(\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_{X'}a\right),$$

par conséquent il vient $-\Theta'\big(a(U)\big)+\bar{\boldsymbol{\iota}}_{\{X',U\}}a=-\bar{\boldsymbol{\iota}}_U\Theta'\circ a-\bar{\boldsymbol{\iota}}_U\left(\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_{X'}a\right)$. On en déduit que la projection sur $\Omega^1(\mathcal{F},Q)$ de $\llbracket(X,a,b,\Theta),(X',a',b',\Theta')\rrbracket$ est $\Theta\circ a'-\Theta'\circ a+\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_X a'-\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_{X'}a$. $\square$

Dans la section précédente nous avons décrit le groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{S})$ comme un sous-groupe du produit semi-direct $\underline{\mathbf{O}}(\mathcal{S})\ltimes_\theta\mathbf{Gau}(\mathcal{S})$. Alternativement, nous pouvons décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{aut}(\mathcal{S})$ comme une sous-algèbre de Lie d'un produit semi-direct d'algèbres de Lie (voir [Var84, section 3.14]). Pour cela, nous introduisons l'algèbre de Lie $\mathfrak{gau}(\mathcal{S})=\Omega^1(\mathcal{F},Q)\times\Omega^2(\mathcal{F})$ dont le crochet est défini par

$$\llbracket(a,b),(a',b')\rrbracket=\big(0,\langle a\wedge a'\rangle_Q\big).$$

Proposition 3.4.11 : L'algèbre de Lie $\mathfrak{aut}(\mathcal{S})$ est la sous-algèbre de Lie constituée des éléments du produit semi-direct $\mathfrak{aut}(\mathcal{Q})\ltimes_\vartheta\mathfrak{gau}(\mathcal{S})$ satisfaisant les relations (3.43), (3.44) et (3.45), où la représentation $\vartheta:\mathfrak{aut}(\mathcal{Q})\to\mathrm{Der}\left[\mathfrak{gau}(\mathcal{S})\right]$ est définie par

$$\vartheta(X,\Theta)(a,b)=\big(\overline{\boldsymbol{\mathscr{L}}}_X a+\Theta\circ a,\boldsymbol{\mathscr{L}}_X b\big).$$

3.5 Exemples

Dans cette dernière section nous traitons trois exemples afin d'illustrer les résultats obtenus dans les sections précédentes.

3.5.1 Algébroïdes de Courant de type D_n

Soit $\mathcal{E}=(E\to M,\mathsf{a},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant exact, c'est-à-dire (voir définition 2.3.6) tel que le fibré vectoriel $E\to M$ s'insère dans la suite exacte courte de fibrés vectoriels

$$0\longrightarrow T^\vee M\xrightarrow{\mathsf{a}^\vee}E^\vee\cong E\xrightarrow{\mathsf{a}}TM\longrightarrow 0$$

Un tel algébroïde de Courant est également appelé *algébroïde de Courant de type D_n* ([Rub13, section 2]). Dans ce cas l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ (proposition 3.1.1) est l'algébroïde canonique $\mathcal{T}_M$ (voir 1.2.4) et l'algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ est trivial.

Une dissection correspond alors à un scindement isotrope $\varepsilon:TM\to E$ de cette suite exacte courte, qui permet d'obtenir un isomorphisme de fibrés vectoriels $\Delta:TM\oplus$

$T^\vee M \to E$ et une 3-forme H sur M (voir la preuve du théorème 2.3.7), induisant un isomorphisme d'algébroïdes de Courant $\Delta : \mathcal{E}_M[H] \to \mathcal{E}$. D'après la proposition 2.3.9 un changement de scindement correspond à la transformation $H \mapsto H - \mathbf{d}B$ pour $B \in \Omega^2(M)$, ce qui est en accord avec le théorème 3.2.7. Relativement à cette dissection, on a $\nabla = 0$ et $R = 0$ (voir la preuve du théorème 3.1.13 donnée en annexe) donc la classe de Chen-Stiénon-Xu $\mathsf{CSX}\big(\mathcal{E}_M[H]\big)$ (voir définition 3.2.15) est la classe de Ševera $[H] \in \mathbf{H}^3(M)$.

Le groupe $\underline{\mathbf{O}}\big(\mathcal{E}_M[H]\big)$ est réduit au groupe $\mathbf{Dif}(M)$ des automorphismes de M et le groupe $\mathbf{Gau}\big(\mathcal{E}_M[H]\big)$ est réduit au groupe abélien $\Omega^2(M)$ des 2-formes sur M. Par conséquent, le groupe des automorphismes forts de $\mathcal{E}_M[H]$ est le sous-groupe de $\mathbf{Dif}(M) \ltimes_\theta \Omega^2(M)$, où l'action est donnée par $\theta(\varphi)(B) = \varphi^* B$, des éléments (φ, B) satisfaisant la condition $H - \varphi^* H = \mathbf{d}B$. Un automorphisme (φ, B) agit sur $X \oplus \xi \in \Gamma(TM \oplus T^\vee M)$ selon

$$(\varphi, B)(X \oplus \xi) = \varphi_*(X) \oplus (\varphi^{-1})^*\big(\xi + \boldsymbol{\iota}_X B\big),$$

et la loi de groupe est donnée par

$$(\varphi, B) \circ (\varphi', B') = (\varphi \circ \varphi', \varphi'^* B + B'),$$

pour tous $\varphi, \varphi' \in \mathbf{Dif}(M)$ et $B, B' \in \Omega^2(M)$. Ce résultat a été obtenu pour la première fois dans [Gua11]. On peut également voir $\mathbf{Aut}\big(\mathcal{E}_M[H]\big)$ comme l'extension de groupes

$$0 \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow \mathbf{Aut}\big(\mathcal{E}_M[H]\big) \longrightarrow \mathbf{Dif}_{[H]}(M) \longrightarrow 1,$$

pour l'injection et la surjection naturelles, où $\mathbf{Dif}_{[H]}(M)$ désigne le groupe des automorphismes φ de M qui préservent la classe de cohomologie $[H] \in \mathbf{H}^3(M)$, c'est-à-dire $\varphi^*[H] - [H] = 0$ dans $\mathbf{H}^3(M)$.

Du point de vue infinitésimal, l'algèbre de Lie des automorphismes forts infinitésimaux relativement à la dissection choisie est la sous-algèbre de Lie de $\Gamma(TM) \ltimes_\vartheta \Omega^2(M)$ (pour l'addition), où l'action est donnée par $\vartheta(X)(b) = \mathscr{L}_X b$, des éléments (X, b) satisfaisant la condition $\mathscr{L}_X H + \mathbf{d}b = 0$. Un automorphisme infinitésimal (X, b) agit sur $U \oplus \xi \in \Gamma(TM \oplus T^\vee M)$ selon

$$(X, b)(U \oplus \xi) = \{X, U\} \oplus \mathscr{L}_X \xi + \boldsymbol{\iota}_U b,$$

et le crochet de Lie est donné par

$$[\![(X, b), (X', b')]\!] = \big(\{X, X'\}, \mathscr{L}_X b' - \mathscr{L}_{X'} b\big),$$

pour tous $X, X' \in \Gamma(TM)$ et $b, b' \in \Omega^2(M)$. Ce résultat a été obtenu pour la première fois dans [Hu09a] et [HU09b, section 4]. On peut également voir $\mathfrak{aut}\big(\mathcal{E}_M[H]\big)$ comme l'extension d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow \mathfrak{aut}\big(\mathcal{E}_M[H]\big) \longrightarrow \mathfrak{X}_{[H]}(M) \longrightarrow 0,$$

pour l'injection et la surjection naturelles, où $\mathfrak{X}_{[H]}(M)$ désigne les champs de vecteurs X sur M qui préservent la classe de cohomologie $[H] \in \mathbf{H}^3(M)$, c'est-à-dire $\mathscr{L}_X[H] = 0$ dans $\mathbf{H}^3(M)$.

3.5.2 Algébroïdes de Courant de type B_n

Soit M une variété. Nous nous intéressons à présent à un certain algébroïde de Courant standard sur M (voir proposition 3.1.15).

Définition 3.5.1 : Soit M une variété. Considérons le fibré vectoriel $T^\vee M \oplus Q \oplus TM \to M$, avec $Q = M \times \mathbb{R} \to M$ le fibré vectoriel trivial de rang 1, équipé du crochet nuls ainsi que du produit scalaire $\langle \lambda, \mu \rangle_Q = \lambda\mu$ pour tous λ, $\mu \in \Gamma(Q) \cong \mathcal{C}^\infty(M)$. De plus considérons pour connexion sur $Q \to M$ la différentielle de De Rham $\mathbf{d}$, $R = 0$ et $H \in \mathbf{H}^3(M)$ une 3-forme $\mathbf{d}$-fermée d'après (3.10). On notera $\mathcal{R}_M[H]$ l'algébroïde de Courant standard associé à ces données (voir 3.1.15) et on l'appellera *algébroïde de Courant de type* B_n (avec $n = \dim M$).

Cet algébroïde de Courant est apparu pour la première fois dans [Rub13, section 2] (avec $H = 0$ cependant). D'après 3.11 son crochet est donné par

$$[\alpha \oplus \lambda \oplus X, \beta \oplus \mu \oplus Y] = \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\alpha + \mu \mathbf{d}\lambda + \boldsymbol{\iota}_Y \boldsymbol{\iota}_X H \oplus \boldsymbol{\iota}_X \mathbf{d}\mu - \boldsymbol{\iota}_Y \mathbf{d}\lambda \oplus \{X, Y\}.$$

Dans ce cas, l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ (proposition 3.1.1) est l'algébroïde canonique $\mathcal{T}_M$ (voir 1.2.4) et l'algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ est $(Q \to M, \mathsf{a} = 0, [\cdot,\cdot]_Q = 0, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$.

On calcule que le groupe $\mathbf{O}(Q)$ des automorphismes orthogonaux de $Q \to M$, équipé de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$, et couvrant un difféomorphisme de M, est constitué des automorphismes de la forme (φ, φ^*) et de la forme $(\varphi, -\varphi^*)$, où $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$. Par conséquent tout élément de $\mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big)$ est de la forme $(\varphi, \varphi^*, A, B)$ ou $(\varphi, -\varphi^*, A, B)$, pour $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$, $A \in \Omega^1(M)$ et $B \in \Omega^2(M)$. La condition (3.31) implique alors que $(\varphi, -\varphi^*, A, B)$ n'est pas une forme possible puisque sinon on aurait $\nabla = 0$. Finalement on notera (φ, A, B) les éléments de $\mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big)$, où $\varphi \in \mathbf{Dif}(M)$, $A \in \Omega^1(M)$ et $B \in \Omega^2(M)$ satisfont les relations $\mathbf{d}A = 0$ et $H - \varphi^* H = \mathbf{d}B$.

D'après le théorème 3.3.16 on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.5.2 : Soit $(\varphi, A, B) \in \mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big)$. Alors (φ, A, B) agit sur une section $\xi \oplus \lambda \oplus X \in \Gamma(T^\vee M \oplus Q \oplus TM)$ selon

$$(\varphi, A, B)(\xi \oplus \lambda \oplus X) = (\varphi^{-1})^* \big(\xi - \lambda A + \boldsymbol{\iota}_X B\big) \oplus \varphi^*(\lambda + A(X)) \oplus \varphi_*(X).$$

La loi de groupe sur $\mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big)$ est donnée par

$$(\varphi, A, B) \circ (\varphi', A', B') = \left(\varphi \circ \varphi', \varphi'^* A + A', \varphi'^* B + B' + \frac{1}{2}\varphi'^* A \wedge A'\right),$$

pour tous $\varphi, \varphi' \in \mathbf{Dif}(M)$, A, $A' \in \Omega^1(M)$ et B, $B' \in \Omega^2(M)$. Le groupe $\mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big)$ peut être considéré comme l'extension de groupes

$$0 \longrightarrow Z^1(M) \times \Omega^2(M) \longrightarrow \mathbf{Aut}\big(\mathcal{R}_M[H]\big) \longrightarrow \mathbf{Dif}_{[H]}(M) \longrightarrow 1,$$

pour l'injection et la surjection naturelles, où $Z^1(M)$ désigne l'ensemble des 1-formes sur M $\mathbf{d}$-fermées.

On retrouve donc le résultat [Rub13, proposition 2.2] lorsque $H = 0$.

Du point de vue infinitésimal, $\mathfrak{o}(Q)$ est constitué des dérivations de la forme $(X, \mathscr{L}_X)$ et de la forme $(X, -\mathscr{L}_X)$, pour $X \in \Gamma(TM)$. Ainsi tout automorphisme infinitésimal de $\mathcal{R}_M[H]$ est de la forme $(X, \mathscr{L}_X, a, b)$ ou de la forme $(X, -\mathscr{L}_X, a, b)$, avec $X \in \Gamma(TM)$, $a \in \Omega^1(M)$ et $b \in \Omega^2(M)$; mais seuls les automorphismes de la forme $(X, \mathscr{L}_X, a, b)$ satisfont la condition (3.43), qui dans ce cas correspond à $[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_U] = \mathscr{L}_{\{X,U\}}$, pour tout $U \in \Gamma(TM)$. Par conséquent les automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{R}_M[H]$ sont les (X, a, b) avec $X \in \Gamma(TM)$, $a \in \Omega^1(M)$ et $b \in \Omega^2(M)$ satisfaisant de plus les relations $\mathbf{d}a = 0$ et $\mathscr{L}_X H + \mathbf{d}b = 0$.

D'après le théorème 3.4.10 on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.5.3 : Soit $(X, a, b) \in \mathfrak{aut}(\mathcal{R}_M[H])$. Alors (X, a, b) agit sur une section $\xi \oplus \lambda \oplus U \in \Gamma(T^\vee M \oplus Q \oplus TM)$ selon

$$(X, a, b)(\xi \oplus \lambda \oplus U) = \mathscr{L}_X \xi - \lambda a + \boldsymbol{\iota}_U b \oplus \mathscr{L}_X \lambda + \boldsymbol{\iota}_U a \oplus \{X, U\},$$

pour tous $\xi \in \Omega^1(M)$, $\lambda \in \Gamma(Q) \cong \mathcal{C}^\infty(M)$ et $U \in \Gamma(TM)$. Le crochet sur $\mathfrak{aut}(\mathcal{R}_M[H])$ est donné par

$$[\![(X, a, b), (X', a', b')]\!] = \big(\{X, X'\}, 2\mathscr{L}_X a' - 2\mathscr{L}_{X'} a, \mathscr{L}_X b' - \mathscr{L}_{X'} b + a \wedge a'\big),$$

pour tous $X, X' \in \Gamma(TM)$, $a, a' \in \Omega^1(M)$ et $b, b' \in \Omega^2(M)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{aut}(\mathcal{R}_M[H])$ peut être considérée comme l'extension d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow Z^1(M) \times \Omega^2(M) \longrightarrow \mathfrak{aut}(\mathcal{R}_M[H]) \longrightarrow \mathfrak{X}_{[H]}(M) \longrightarrow 0,$$

pour l'injection et la surjection naturelles.

On retrouve donc le résultat [Rub13, section 2] lorsque $H = 0$.

3.5.3 Algébroïdes de Courant hétérotiques

Définition 3.5.4 : Soit $\mathcal{H} = (E \to M, \mathsf{a}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un algébroïde de Courant transitif. On dit que $\mathcal{H}$ est *hétérotique* si son algébroïde de Lie associé $\overline{\mathcal{H}}$ (proposition 2.6.4) est isomorphe à l'algébroïde d'Atiyah d'un fibré principal (voir exemple 1.2.10).

Les algébroïdes de Courant hétérotiques sont apparus pour la première fois dans [BH15, section 3.3]. On notera que d'après (3.2), le fibré vectoriel de l'algébroïde de Lie $\overline{\mathcal{H}}$ est $E/T^\vee M \to M$.

Soit G un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$, équipée de sa forme de Killing $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathfrak{g}$ (voir exemple 1.2.13). Soit $\pi : P \to M$ un fibré G-principal et soit $\operatorname{Ad} P = P \times_{\operatorname{Ad}} \mathfrak{g} \to M$ le fibré adjoint de $P \to M$ (voir [Nee08, proposition 5.1.6]). Les fibres de $\operatorname{Ad} P \to M$ sont isomorphes à $\mathfrak{g}$ et on étend le crochet $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ à $\Gamma(\operatorname{Ad} P)$ par la formule $[u, v]_\mathfrak{g}\big|_x = [u_x, v_x]_\mathfrak{g}$ pour tous $u, v \in \Gamma(\operatorname{Ad} P)$ et $x \in M$, conférant ainsi à $\operatorname{Ad} P \to M$ une structure de fibré vectoriel en algèbres de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant quadratique, on étend le produit scalaire de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ à $\Gamma(\operatorname{Ad} P)$ par la formule $\langle u, v\rangle_\mathfrak{g}\big|_x = \langle u_x, v_x\rangle_\mathfrak{g}$ pour tous $u, v \in \Gamma(\operatorname{Ad} P)$ et $x \in M$, conférant ainsi à $\operatorname{Ad} P \to M$ une structure de fibré vectoriel en algèbres de Lie quadratiques. On notera également que $\Gamma(\operatorname{Ad} P) \cong \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ (voir par exemple [Nee08, proposition 1.6.3]).

Soit $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ une connexion sur $P \to M$, de courbure $R = \mathbf{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]_{\mathfrak{g}} \in \Omega^2(M, \operatorname{Ad} P)$ (voir [Nee08, sections 5.4 et 6.1]). Notons ∇ la dérivée covariante sur $\operatorname{Ad} P \to M$ issue de ω (voir [KN96, chapitre 3, section 1]). Soit $H \in \Omega^3(M)$ tel que $\mathbf{d}H = \frac{1}{2}\langle R \wedge R\rangle_{\mathfrak{g}}$.

Ayant introduit ces notations, considérons à présent le fibré vectoriel $T^\vee M \oplus Q \oplus TM \to M$ avec $Q = \operatorname{Ad} P$ équipé de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, que l'on munit de la connexion ∇, de la 2-forme de courbure R et de la 3-forme H. Alors d'après [BH15, proposition 3.2] l'algébroïde de Courant standard associé à ces données, que l'on notera simplement $\mathcal{H}$, est hétérotique pour l'algébroïde d'Atiyah de $\pi : P \to M$, et réciproquement tout algébroïde de Courant hétérotique est de cette forme après choix d'une dissection. Dans ce cas, l'algébroïde de Lie $\mathcal{F}$ (proposition 3.1.1) est l'algébroïde canonique $\mathcal{T}_M$ (voir 1.2.4) et l'algébroïde de Courant $\mathcal{Q}$ est $(Q \to M, \mathsf{a} = 0, [\cdot,\cdot]_Q = [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}})$; $\Omega^\bullet(\mathcal{F}) \cong \Omega^\bullet(M)$, et d'après [Nee08, proposition 5.3.4] on a un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules $\Omega(\mathcal{F}, Q) \cong \Omega^\bullet(P, \mathfrak{g})_{\mathsf{bas}}$ où le second $\mathcal{C}^\infty(M)$-module correspond au module des formes différentielles sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ *basiques*, c'est-à-dire celles qui sont nulles sur $\operatorname{Ker}(\mathbf{d}\pi)$ (les champs de vecteurs *horizontaux*) et G-invariantes.

Les résultats des sections 3.3 et 3.4 s'appliquent à cet exemple, on obtient des formules identiques. De plus, concernant le groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{H})$, on retrouve le résultat obtenu dans [GFRT15, proposition 4.7].

Annexe

Dans cette annexe, nous donnons une preuve du théorème 3.1.13 de structure de Chen-Stiénon-Xu, avec des détails supplémentaires. La preuve originale se trouve dans [CSX13, section 2]. Dans cette preuve, on désignera par a_E, $[\cdot,\cdot]_E$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ l'ancre, le crochet et le produit scalaire sur $\mathcal{E}$; afin de distinguer de l'ancre a, du crochet $[\cdot,\cdot]$ et du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dont va être équipé le fibré vectoriel $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$.

Preuve : L'ancre sur $F^\vee \oplus Q \oplus F \to M$ est donnée par

$$\mathsf{a}(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X) = \mathsf{a}_E\big(\Delta(\alpha \oplus \bar{a} \oplus X)\big) = (\mathsf{a}_E \circ \lambda)(X) = X.$$

Pour le produit scalaire on a

$$\begin{aligned}\langle \alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y\rangle &= \big\langle \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp + \sigma(\bar{a}) + \lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp + \sigma(\bar{b}) + \lambda(Y)\big\rangle_E \\ &= \alpha(Y) + \beta(X) + \big\langle\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})\big\rangle_E,\end{aligned}$$

en développant et en utilisant les propriétés de λ et σ, et (2.17), puis par définition

$$\big\langle\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})\big\rangle_E = \big\langle\pi(\sigma(\bar{a})), \pi(\sigma(\bar{b}))\big\rangle_Q = \langle\bar{a}, \bar{b}\rangle_Q.$$

A présent étudions comment le crochet est transporté. On a

$$\begin{aligned}[\alpha \oplus \bar{a} \oplus X, \beta \oplus \bar{b} \oplus Y] &= \big[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp + \sigma(\bar{a}) + \lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp + \sigma(\bar{b}) + \lambda(Y)\big]_E \\ &= \big[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\big]_E + \big[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{b})\big]_E + \big[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \lambda(Y)\big]_E \\ &\quad + \big[\sigma(\bar{a}), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\big]_E + \big[\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})\big]_E + \big[\sigma(\bar{a}), \lambda(Y)\big]_E \\ &\quad + \big[\lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\big]_E + \big[\lambda(X), \sigma(\bar{b})\big]_E + \big[\lambda(X), \lambda(Y)\big]_E,\end{aligned}$$

et calculons chacun de ces termes.

- $\mathsf{a}_E\left([\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E\right) = 0$ par (2.13) et (2.17) donc $\big[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\big]_E \in \Gamma(\operatorname{Ker} \mathsf{a}_E) \cong \Gamma(F^\vee) \oplus \Gamma(Q)$. Mais la composante sur Q est nulle car d'après (2.5) on a

$$\begin{aligned}\big\langle[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E, \sigma(\bar{c})\big\rangle_E &= (\mathsf{a}_E \circ \Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)) \cdot \big\langle\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{c})\big\rangle_E \\ &\quad - \big\langle\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, [\mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \sigma(\bar{c})]_E\big\rangle_E \\ &= \big\langle\alpha\big|\mathsf{a}_E\left([\mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \sigma(\bar{c})]_E\right)\big\rangle_E = 0,\end{aligned}$$

toujours d'après (2.17). A présent pour tout $Z \in \Gamma(F)$, on a que

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E(Z) &= \left\langle [\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E, \lambda(Z)\right\rangle_E \\
&= (\mathsf{a}_E \circ \Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)) \cdot \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \lambda(Z)\right\rangle_E \\
&\quad - \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, [\mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \lambda(Z)]_E\right\rangle_E \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- $\mathsf{a}_E\left([\lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E\right) = 0$ et la composante sur Q est nulle puisque

$$\begin{aligned}
\left\langle [\lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E, \sigma(\bar{c})\right\rangle_E &= X \cdot \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \sigma(\bar{c})\right\rangle_E - \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, [\lambda(X), \sigma(\bar{c})]_E\right\rangle_E \\
&= X \cdot \left\langle \beta \middle| (\mathsf{a}_E \circ \sigma)(\bar{c})\right\rangle - \left\langle \beta \middle| \mathsf{a}_E([\lambda(X), \sigma(\bar{c})]_E)\right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\mathsf{a}_E \circ \sigma = 0$, par définition d'un scindement. A présent pour tout $Z \in \Gamma(F)$,

$$\begin{aligned}
\left[\lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right]_E(Z) &= \left\langle [\lambda(X), \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp]_E, \lambda(Z)\right\rangle_E \\
&= X \cdot \left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp, \lambda(Z)\right\rangle - \left\langle [\lambda(X), \lambda(Z)]_E, \mathsf{a}_E^\vee(\beta)^\sharp\right\rangle_E \\
&= X \cdot \beta(Z) - \beta\big([X, Z]\big) \\
&= \boldsymbol{\iota}_Z \boldsymbol{\mathscr{L}}_X \beta.
\end{aligned}$$

- $\mathsf{a}_E\left([\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{b})]_E\right) = 0$, mais la composante sur Q est nulle. En effet on a

$$\pi\left([\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{b})]_E\right) = \left[\pi \circ \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \bar{b}\right]_E,$$

mais pour $u \in \operatorname{Ker} \mathsf{a}_E$, on a

$$\left\langle \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, u\right\rangle_E = \left\langle \alpha \middle| \mathsf{a}_E(u)\right\rangle = 0,$$

donc $\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp \in (\operatorname{Ker} \mathsf{a}_E)^\perp$ et donc $\pi \circ \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp = 0$. Enfin pour tout $Z \in \Gamma(F)$ on a

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{b})\right]_E(Z) &= \left\langle [\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \sigma(\bar{b})]_E, \lambda(Z)\right\rangle_E \\
&= (\mathsf{a}_E \circ \Upsilon^{-1} \circ \mathsf{a}_E^\vee(\alpha)) \cdot \left\langle \sigma(\bar{b}), \lambda(Z)\right\rangle_E \\
&\quad - \left\langle \sigma(\bar{b}), [\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \lambda(Z)]_E\right\rangle_E \\
&= 0,
\end{aligned}$$

or $\sigma(\bar{b}) \in \Gamma(Q)$ et $\left[\mathsf{a}_E^\vee(\alpha)^\sharp, \lambda(Z)\right]_E \in \Gamma(F^\vee)$ d'après un point précédent donc le produit scalaire est nul.

- $\mathsf{a}_E\left([\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})]_E\right) = 0$ mais cette fois-ci la composante sur Q n'est pas nulle puisque

$$\left[\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})\right]_E = P(\bar{a}, \bar{b}) \oplus \pi\left([\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})]_E\right) = P(\bar{a}, \bar{b}) \oplus [\bar{a}, \bar{b}]_Q,$$

avec

$$P(\bar{a}, \bar{b}) = \operatorname{pr}_{F^\vee}[\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b})]_E,$$

dont on déterminera l'expression ultérieurement.

- $\mathsf{a}_E\left([\lambda(X),\sigma(\bar b)]_E\right)=0$ et on pose $\left[\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E=K(X,\bar b)\oplus\nabla_X\bar b$ avec

$$K(X,\bar b)=\mathrm{pr}_{F^\vee}\left[\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E,$$

dont on déterminera l'expression ultérieurement et

$$\boxed{\nabla_X\bar b=\mathrm{pr}_Q\left[\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E,}$$

que l'on va examiner à présent. Tout d'abord $\nabla_X\bar b$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire par rapport à X

$$\begin{aligned}\nabla_{fX}\bar b&=\mathrm{pr}_Q\left[f\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E\\&=\mathrm{pr}_Q\left\{f\left[\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E-\left((\mathsf{a}_E\circ\sigma)(\bar b)\cdot f\right)\lambda(X)+\left\langle\lambda(X),\sigma(\bar b)\right\rangle_E\mathsf{D}f\right\}\\&=f\nabla_X\bar b,\end{aligned}$$

et satisfait également

$$\begin{aligned}\nabla_X(f\bar b)&=\mathrm{pr}_Q\left[\lambda(X),f\sigma(\bar b)\right]_E\\&=\mathrm{pr}_Q\left\{f\left[\lambda(X),\sigma(\bar b)\right]_E+((\mathsf{a}_E\circ\lambda)(X)\cdot f)\,\sigma(\bar b)\right\}\\&=f\nabla_X\bar b+(X\cdot f)\bar b.\end{aligned}$$

∇ est donc une $\mathcal{F}$-connexion sur le fibré vectoriel $Q\to M$ (voir 1.5.3).

- Le terme $\left[\lambda(X),\lambda(Y)\right]_E$ a trois composantes toutes non nulles. Tout d'abord sur F on a $\mathsf{a}_E\left([\lambda(X),\lambda(Y)]_E\right)=\{X,Y\}$. Puis posons

$$\boxed{R(X,Y)=\mathrm{pr}_Q\left[\lambda(X),\lambda(Y)\right]_E.}$$

Alors R est antisymétrique en X et Y puisque

$$\begin{aligned}R(Y,X)&=\mathrm{pr}_Q\left[\lambda(Y),\lambda(X)\right]_E\\&=\mathrm{pr}_Q\left\{\mathsf{D}\left\langle\lambda(X),\lambda(Y)\right\rangle_E-\left[\lambda(X),\lambda(Y)\right]_E\right\}\\&=-R(X,Y),\end{aligned}$$

et également $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire car

$$\begin{aligned}R(X,fY)&=\mathrm{pr}_Q\left[\lambda(X),f\lambda(Y)\right]_E\\&=\mathrm{pr}_Q\left\{f\left[\lambda(X),\lambda(Y)\right]_E+((\mathsf{a}_E\circ\lambda)(X)\cdot f)\,\lambda(Y)\right\}\\&=fR(X,Y).\end{aligned}$$

Par conséquent $R\in\Gamma(\Lambda^2F^\vee\otimes Q)$. Enfin pour la composante sur $F^\vee$ posons

$$\boxed{H(X,Y,Z)=\left\langle\,\mathrm{pr}_{F^\vee}[\lambda(X),\lambda(Y)]_E\middle|\lambda(Z)\right\rangle=\left\langle[\lambda(X),\lambda(Y)]_E,\lambda(Z)\right\rangle_E.}$$

Alors H est antisymétrique en X et Y puisque

$$\begin{aligned} H(Y,X,Z) &= \big\langle \mathsf{D}\langle\lambda(Y),\lambda(X)\rangle_E - [\lambda(X),\lambda(Y)]_E, \lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= -H(X,Y,Z), \end{aligned}$$

ainsi qu'en Y et Z car

$$\begin{aligned} H(X,Z,Y) &= X\cdot\big\langle\lambda(Z),\lambda(Y)\big\rangle_E - \big\langle\lambda(Z),[\lambda(X),\lambda(Y)]_E\big\rangle_E \\ &= -H(X,Y,Z). \end{aligned}$$

Il est clair que H est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en Z et que d'autre part

$$\begin{aligned} H(fX,Y,Z) &= \big\langle\langle\lambda(X),\lambda(Y)\rangle_E\mathsf{D}f - (Y\cdot f)\lambda(X) + f[\lambda(X),\lambda(Y)]_E, \lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= fH(X,Y,Z); \end{aligned}$$

par conséquent $H\in\Gamma(\Lambda^3F^\vee)$.

Nous devons à présent identifier les quantités $P(\bar a,\bar b)$ et $K(X,\bar a)$. Pour $P(\bar a,\bar b)$, on a, pour tout $Z\in\Gamma(F)$,

$$\begin{aligned} \big\langle P(\bar a,\bar b)|\lambda(Z)\big\rangle &= \big\langle \mathrm{pr}_{F^\vee}[\sigma(\bar a),\sigma(\bar b)]_E,\lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= \big\langle[\sigma(\bar a),\sigma(\bar b)]_E,\lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= (\mathsf{a}_E\circ\sigma(\bar a))\cdot\big\langle\sigma(\bar b),\sigma(u)\big\rangle_E - \big\langle\sigma(\bar b),[\sigma(\bar u),\lambda(Z)]_E\big\rangle_E \\ &= \big\langle\sigma(\bar b),\mathsf{D}\langle\lambda(Z),\sigma(\bar a)\rangle_E - [\lambda(X),\sigma(\bar a)]_E\big\rangle_E \\ &= \big\langle\sigma(\bar b),[\lambda(Z),\sigma(\bar a)]_E\big\rangle_E \\ &= \big\langle\sigma(\bar b),\mathrm{pr}_Q[\lambda(Z),\sigma(\bar a)]_E\big\rangle_E \\ &= \big\langle\nabla_Z\bar a,\bar b\big\rangle_Q. \end{aligned}$$

Puis pour $Q(X,\bar a)$, on a pour tout $Z\in\Gamma(F)$,

$$\begin{aligned} \big\langle Q(X,\bar a)|\lambda(Z)\big\rangle &= \big\langle\,\mathrm{pr}_{F^\vee}[\lambda(X),\sigma(\bar a)]_E,\lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= \big\langle[\lambda(X),\sigma(\bar a)]_E,\lambda(Z)\big\rangle_E \\ &= X\cdot\big\langle\sigma(\bar b),\lambda(Z)\big\rangle_E - \big\langle\sigma(\bar b),[\lambda(X),\lambda(Z)]_E\big\rangle_E \\ &= -\big\langle\sigma(\bar b),\mathrm{pr}_{F^*}[\lambda(X),\lambda(Z)]_E\big\rangle_E \\ &= -\big\langle\bar b,R(X,Z)\big\rangle_Q. \end{aligned}$$

Par conséquent le crochet sur $F^\vee\oplus Q\oplus F\to M$ est déterminé par la donnée de H, R et ∇.

A présent examinons les relations de compatibilité entre ces données afin que l'ancre a, le crochet $[\cdot,\cdot]$ et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que l'on vient de décrire équipent le fibré vectoriel $F^\vee\oplus Q\oplus F\to M$ d'une structure d'algébroïde de Courant. La propriété (2.7) est satisfaite en complétant le crochet comme indiqué dans l'énoncé du théorème. Maintenant pour (2.5), seul le cas où $u=X\in\Gamma(F)$ et $v=\bar a, w=\bar b\in\Gamma(Q)$ donne une relation non triviale

$$\begin{aligned} X\cdot\langle\bar a,\bar b\rangle_Q &= \big\langle[X,\bar a],\bar b\big\rangle + \big\langle\bar a,[X,\bar b]\big\rangle \\ &= \big\langle\nabla_X\bar a,\bar b\big\rangle_Q + \big\langle\bar a,\nabla_X\bar b\big\rangle_Q. \end{aligned}$$

A noter que, bien que les autres cas soient triviaux, la plupart demandent de long calculs pour vérifier la trivialité. La situation est similaire pour vérifier (2.1). La plupart des cas donnent des relations triviales, mais pour les obtenir il est nécessaire de faire de longs calculs. Ci-après nous ne détaillons que les relations non triviales, celles qui donnent des relations de compatibilité. Pour le cas où $u = X \in \Gamma(F)$ et $v = \bar{a}, w = \bar{b} \in \Gamma(Q)$ on doit vérifier

$$\left[X, P(\bar{a},\bar{b}) \oplus [\bar{a},\bar{b}]_Q\right] = \left[K(X,\bar{a}) \oplus \nabla_X\bar{a}, \bar{b}\right] + \left[\bar{a}, K(X,\bar{b}) \oplus \nabla_X\bar{b}\right],$$

soit en développant encore

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathscr{L}}_X P(\bar{a},\bar{b}) + K\big(X,[\bar{a},\bar{b}]_Q\big) \oplus \nabla_X[\bar{a},\bar{b}]_Q = P(\nabla_X\bar{a},\bar{b}) + P(\bar{a},\nabla_X\bar{b})\\ \oplus \left[\nabla_X\bar{a},\bar{b}\right]_Q + \left[\bar{a},\nabla_X\bar{b}\right]_Q.\end{aligned}$$

En projetant sur Q on constate que les données doivent donc satisfaire la relation

$$\nabla_X[\bar{a},\bar{b}]_Q = \left[\nabla_X\bar{a},\bar{b}\right]_Q + \left[\bar{a},\nabla_X\bar{b}\right]_Q.$$

Cependant il reste à montrer que la projection sur $F^\vee$ de cette relation est bien triviale. Tout d'abord pour tout $Y \in \Gamma(F)$ on a

$$\left\langle P(\nabla_X\bar{a},\bar{b}) + P(\bar{a},\nabla_X\bar{b})\middle|Y\right\rangle = \left\langle\bar{b},\nabla_Y\nabla_X\bar{a}\right\rangle_Q + \left\langle\nabla_X\bar{b},\nabla_Y\bar{a}\right\rangle_Q,$$

et ensuite pour le membre de gauche

$$\begin{aligned}\left\langle\boldsymbol{\mathscr{L}}_X P(\bar{a},\bar{b}) + K(X,[\bar{a},\bar{b}]_Q)\middle|Y\right\rangle &= \boldsymbol{\iota}_Y\mathbf{d}\left(P(\bar{a},\bar{b})(X)\right) + \mathbf{d}\left(P(\bar{a},\bar{b})\right)(X,Y)\\ &\quad - \left\langle[\bar{a},\bar{b}]_Q, R(X,Y)\right\rangle_Q\\ &= \left\langle\nabla_Y\bar{b},\nabla_X\bar{a}\right\rangle_Q + \left\langle\bar{b},\nabla_Y\nabla_X\bar{a}\right\rangle_Q\\ &\quad + X\cdot\left\langle\bar{b},\nabla_Y\bar{a}\right\rangle_Q - Y\cdot\left\langle\bar{b},\nabla_X\bar{a}\right\rangle_Q\\ &\quad - \left\langle\bar{b},\nabla_{\{X,Y\}}\bar{a}\right\rangle_Q - \left\langle[\bar{a},\bar{b}]_Q, R(X,Y)\right\rangle_Q\\ &= \left\langle\nabla_X\bar{b},\nabla_Y\bar{a}\right\rangle_Q + \left\langle\bar{b},\nabla_X\nabla_Y\bar{a}\right\rangle_Q\\ &\quad - \left\langle\bar{b},\nabla_{\{X,Y\}}\bar{a}\right\rangle_Q - \left\langle[\bar{a},\bar{b}]_Q, R(X,Y)\right\rangle_Q,\end{aligned}$$

or d'après une relation que l'on va montrer indépendamment ci-dessous

$$\left\langle\bar{b},\nabla_X\nabla_Y\bar{a} - \nabla_Y\nabla_X\bar{a} - \nabla_{\{X,Y\}}\bar{a}\right\rangle_Q = \left\langle\bar{b},[R(X,Y),\bar{a}]\right\rangle_Q,$$

on en déduit la relation

$$\left\langle\bar{b},[R(X,Y),\bar{a}]\right\rangle_Q + \left\langle[\bar{a},\bar{b}]_Q, R(X,Y)\right\rangle_Q = 0.$$

Puis $\mathbf{d}$ étant à valeurs dans $\Gamma(F^\vee)$, on obtient

$$\left\langle\bar{b},[\bar{a},R(X,Y)]\right\rangle_Q + \left\langle[\bar{a},\bar{b}]_Q, R(X,Y)\right\rangle_Q = 0,$$

qui n'est autre que (3.5).

Montrons à présent la relation mentionnée ci-dessus. Elle est obtenue dans le cas où $u = X, v = Y \in \Gamma(F)$ et $w = \bar{a} \in \Gamma(Q)$ dans (2.1) :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X K(X,\bar{a}) + K(X,\nabla_Y\bar{a}) \oplus \nabla_X\nabla_Y\bar{a} = P\big(R(X,Y),\bar{a}\big) + K\big(\{X,Y\},\bar{a}\big)\\ +\mathscr{L}_Y K(X,\bar{a}) + K(Y,\nabla_X\bar{a}) \oplus [R(X,Y),\bar{a}] + \nabla_{\{X,Y\}}\bar{a} + \nabla_Y\nabla_X\bar{a}.\end{aligned}$$

Ainsi en projetant sur Q on a la relation désirée (3.9) puisque

$$\big(\mathbf{d}^2_\nabla\bar{a}\big)(X,Y) = [\nabla_X,\nabla_Y]\bar{a} - \nabla_{\{X,Y\}}\bar{a},$$

d'après la formule (1.12). Cependant il reste à voir qu'en projetant sur $F^\vee$ la relation est triviale. En évaluant sur une section $Z \in \Gamma(F)$ on constate qu'il s'agit de la relation (3.8) qu'il reste à démontrer. Les deux dernières relations s'obtiennent en considérant (2.1) dans le cas où les trois éléments sont dans $\Gamma(F)$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X H(Y,Z,\cdot) + K\big(X,R(Y,Z)\big) + H\big(X,\{Y,Z\},\cdot\big) \oplus \nabla_X R(Y,Z)\\ + R\big(X,\{Y,Z\}\big) \oplus \big\{X,\{Y,Z\}\big\}\\ = -\mathscr{L}_Z H(X,Y,\cdot) + \mathbf{d}\big(H(X,Y,Z)\big) - K\big(Z,R(X,Y)\big) +\\ \mathscr{L}_Y H(X,Z,\cdot) + K\big(Y,R(X,Z)\big) + H\big(Y,\{X,Z\},\cdot\big)\\ \oplus -\nabla_Z R(X,Y) + R\big(\{X,Y\},Z\big) + \nabla_Y R(X,Z)\\ + R\big(Y,\{X,Z\}\big) \oplus \big\{\{X,Y\},Z\big\} + \big\{Y,\{X,Z\}\big\}.\end{aligned}$$

La projection sur F donne l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie des champs de vecteurs. Sur Q on obtient la relation (3.8) car d'après (1.12), pour tout $\omega \in \Omega^2(\mathcal{F},\mathcal{Q})$ on a

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_\nabla\omega(X,Y,Z) = \Big\{\nabla_X\omega(Y,Z) - \omega\big(\{X,Y\},Z\big)\Big\}\\ + \text{permutations circulaires sur } X, Y \text{ et } Z.\end{aligned}$$

Enfin on obtient la dernière relation (3.10) en projetant sur $F^\vee$. En effet, on obtient en évaluant sur une section $W \in \Gamma(F)$ et en développant que

$$\begin{aligned}X\cdot H(Y,Z,W) - H\big(Y,Z,\{X,W\}\big) + H\big(X,\{Y,Z\},W\big) + Z\cdot H(X,Y,W)\\ - W\cdot H(X,Y,Z) - H\big(X,Y,\{Z,W\}\big) - H\big(\{X,Y\},Z,W\big)\\ - Y\cdot H(X,Z,W) + H\big(X,Z,\{Y,W\}\big) - H\big(Y,\{X,Z\},W\big)\\ = \big\langle R(X,Y),R(Z,W)\big\rangle_Q + \big\langle R(Y,Z),R(X,W)\big\rangle_Q - \big\langle R(Y,W),R(X,Z)\big\rangle_Q.\end{aligned}$$

Le membre de gauche est $\mathbf{d}H(X,Y,Z,W)$ d'après la formule intrinsèque de la différentielle (1.9) et le membre de droite est

$$\frac{1}{8}\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^{|\sigma|}\big\langle R(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}),R(X_{\sigma(3)},X_{\sigma(4)})\big\rangle_Q,$$

avec $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$ et $X_4 = W$. Pour le montrer, on pourra faire une liste des permutations et de leur signature à l'aide du logiciel Sage [1]. Puis on utilise les différentes symétries à notre disposition pour réduire le nombre de permutations à prendre en compte dans la somme. Etant donné une telle permutation,

1. Voir `http://www.sagemath.org/` pour plus d'informations et `https://sagecell.sagemath.org/` pour accéder à un serveur de calcul en ligne.

- Puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ est symétrique, on peut échanger les première et seconde paires dans la 4-permutation. Ceci correspond à effectuer deux transpositions donc la signature reste inchangée, on obtient une permutation équivalente.
- Puisque R est antisymétrique, en faisant une transposition sur la première paire et une transposition sur la seconde paire de la 4-permutation, on obtient alors une permutation équivalente.

Finalement, il y a trois classes d'équivalence sous l'action de ces symétries (donnant chacune huit représentants dans la somme plus haut), qui peuvent être représentées par les permutations suivantes : $(1,2,3,4) \mapsto (1,2,3,4)$, de signature $+1$, qui correspond au terme $\big\langle R(X,Y), R(Z,W) \big\rangle_Q$; $(1,2,3,4) \mapsto (1,4,2,3)$ de signature $+1$, qui correspond au terme $\big\langle R(Y,Z), R(X,W) \big\rangle_Q$; et enfin $(1,2,3,4) \mapsto (2,4,1,3)$ de signature -1, qui correspond au terme $-\big\langle R(Y,W), R(X,Z) \big\rangle_Q$. Ceci achève la preuve. $\square$

Bibliographie

[AMSW14] T. Asakawa, H. Muraki, S. Sasa et S. Watamura : Poisson-generalized geometry and R-flux. 2014. arXiv:1408.2649v1.

[AMW15] T. Asakawa, H. Muraki et S. Watamura : Topological T-duality via Lie algebroids and Q-flux in Poisson-generalized geometry. 2015. arXiv:1503.05720v1.

[Ati57] M. F. Atiyah : Complex analytic connections in fibre bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:181–207, 1957.

[AX07] Anton Alekseev et Ping Xu : Derived brackets and Courant algebroids, 2007.

[Bar12] D. Baraglia : Leibniz algebroids, twistings and exceptional generalized geometry. *J. Geom. Phys.*, 62(5):903–934, 2012.

[Bar13] David Baraglia : Conformal Courant algebroids and orientifold T-duality. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 10(2):1250084, 35, 2013.

[BCG07] Henrique Bursztyn, Gil R. Cavalcanti et Marco Gualtieri : Reduction of Courant algebroids and generalized complex structures. *Adv. Math.*, 211(2): 726–765, 2007.

[BCG08] Henrique Bursztyn, Gil R. Cavalcanti et Marco Gualtieri : Generalized Kähler and hyper-Kähler quotients. *In Poisson geometry in mathematics and physics*, volume 450 de *Contemp. Math.*, pages 61–77. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[BDD07] Elisabetta Barletta, Sorin Dragomir et Krishan L. Duggal : *Foliations in Cauchy-Riemann geometry*, volume 140 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[BH15] David Baraglia et Pedram Hekmati : Transitive courant algebroids, string structures and t-duality. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 19(3):613–672, 2015.

[BKS05] Martin Bojowald, Alexei Kotov et Thomas Strobl : Lie algebroid morphisms, Poisson sigma models, and off-shell closed gauge symmetries. *J. Geom. Phys.*, 54(4):400–426, 2005.

[Bre07] Paul Bressler : The first Pontryagin class. *Compos. Math.*, 143(5):1127–1163, 2007.

[BS11] Yan Hui Bi et Yun He Sheng : On higher analogues of Courant algebroids. *Sci. China Math.*, 54(3):437–447, 2011.

[BT82] Raoul Bott et Loring W. Tu : *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[CA15] Joana M. Nunes da Costa et Paulo Antunes : Hypersymplectic structures on Courant algebroids. *J. Geom. Mech.*, 7(3):255–280, 2015.

[Car04] Élie Cartan : Sur la structure des groupes infinis de transformation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 21:153–206, 1904.

[Car09] Pierre Cartier : Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes. *Astérisque*, (326): Exp. No. 987, viii, 165–196 (2010), 2009. Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008.

[CdSW99] Ana Cannas da Silva et Alan Weinstein : *Geometric models for noncommutative algebras*, volume 10 de *Berkeley Mathematics Lecture Notes*. American Mathematical Society, Providence, RI ; Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, Berkeley, CA, 1999.

[CE48] Claude Chevalley et Samuel Eilenberg : Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 63(1):85–85, jan 1948.

[CF03] Marius Crainic et Rui Fernandes : Integrability of Lie brackets. *Annals of Mathematics*, 157(2):575–620, 2003.

[CG10] Gil R. Cavalcanti et Marco Gualtieri : Generalized complex geometry and T-duality. *In A celebration of the mathematical legacy of Raoul Bott*, volume 50 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 341–365. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[CMTW14] André Coimbra, Ruben Minasian, Hagen Triendl et Daniel Waldram : Generalised geometry for string corrections. *Journal of High Energy Physics*, 2014(11), 2014.

[Cou90] Theodore James Courant : Dirac manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):631–661, 1990.

[Cra03] Marius Crainic : Differentiable and algebroid cohomology, van Est isomorphisms, and characteristic classes. *Comment. Math. Helv.*, 78(4):681–721, 2003.

[CSX13] Zhuo Chen, Mathieu Stiénon et Ping Xu : On regular Courant algebroids. *J. Symplectic Geom.*, 11(1):1–24, 2013.

[DZ11] Jean-Paul Dufour et Nguyen Tien Zung : Normal forms of Poisson structures. *In Lectures on Poisson geometry*, volume 17 de *Geom. Topol. Monogr.*, pages 109–169. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2011.

[ELW99] Sam Evens, Jiang-Hua Lu et Alan Weinstein : Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 50(200):417–436, 1999.

[Fer00] Rui Loja Fernandes : Connections in Poisson geometry. I. Holonomy and invariants. *J. Differential Geom.*, 54(2):303–365, 2000.

[Fer02] Rui Loja Fernandes : Lie algebroids, holonomy and characteristic classes. *Adv. Math.*, 170(1):119–179, 2002.

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas : *Rational homotopy theory*, volume 205 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[GBY15] François Gay-Balmaz et Hiroaki Yoshimura : Dirac reduction for nonholonomic mechanical systems and semidirect products. *Adv. in Appl. Math.*, 63:131–213, 2015.

[GF14] Mario Garcia-Fernandez : Torsion-free generalized connections and heterotic supergravity. *Comm. Math. Phys.*, 332(1):89–115, 2014.

[GFRT15] Mario Garcia-Fernandez, Roberto Rubio et Carl Tipler : Infinitesimal moduli for the Strominger system and generalized Killing spinors. 2015. arXiv:1503.07562v1.

[GFS15] Mario Garcia-Fernandez et Carlos Shahbazi : Self-dual generalized metrics for pure $N = 1$ six-dimensional supergravity. 2015. arXiv:1505.03088.

[GHV72] Werner Greub, Stephen Halperin et Ray Vanstone : *Connections, curvature, and cohomology. Vol. I : De Rham cohomology of manifolds and vector bundles.* Academic Press, New York-London, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 47.

[GHV73] Werner Greub, Stephen Halperin et Ray Vanstone : *Connections, curvature, and cohomology. Vol. II : Lie groups, principal bundles, and characteristic classes.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-II.

[GHV76] Werner Greub, Stephen Halperin et Ray Vanstone : *Connections, curvature, and cohomology.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976. Volume III : Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-III.

[GKP13] Janusz Grabowski, David Khudaverdyan et Norbert Poncin : The supergeometry of Loday algebroids. *J. Geom. Mech.*, 5(2):185–213, 2013.

[Gra06] Mariana Graña : Flux compactifications and generalized geometries. *Classical and Quantum Gravity*, 23(21):S883–S926, oct 2006.

[Gre75] Werner Greub : *Linear algebra.* Springer-Verlag, New York-Berlin, fourth édition, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 23.

[GS14] Melchior Grützmann et Mathieu Stiénon : Matched pairs of Courant algebroids. *Indag. Math. (N.S.)*, 25(5):977–991, 2014.

[Gua11] Marco Gualtieri : Generalized complex geometry. *Ann. of Math. (2)*, 174(1): 75–123, 2011.

[Gü10] Hasan Gündoğan : Lie algebras of smooth sections. arXiv:0803.2800, 2010.

[Hit03] Nigel Hitchin : Generalized Calabi-Yau manifolds. *Q. J. Math.*, 54(3):281–308, 2003.

[HM90] Philip J. Higgins et Kirill Mackenzie : Algebraic constructions in the category of Lie algebroids. *J. Algebra*, 129(1):194–230, 1990.

[HMS89] G. Hector, E. Macías et M. Saralegi : Lemme de Moser feuilleté et classification des variétés de Poisson régulières. *Publ. Mat.*, 33(3):423–430, 1989.

[Hör07] Lars Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators. III.* Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2007. Pseudo-differential operators, Reprint of the 1994 edition.

[HS15] Wei Hong et Mathieu Stiénon : From hypercomplex to holomorphic symplectic structures. *J. Geom. Phys.*, 96:187–203, 2015.

[Hu09a] Shengda Hu : Hamiltonian symmetries and reduction in generalized geometry. *Houston J. Math.*, 35(3):787–811, 2009.

[HU09b] Shengda Hu et Bernardo Uribe : Extended manifolds and extended equivariant cohomology. *J. Geom. Phys.*, 59(1):104–131, 2009.

[Hue90] Johannes Huebschmann : Poisson cohomology and quantization. *J. Reine Angew. Math.*, 408:57–113, 1990.

[Hue98] Johannes Huebschmann : Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras and Batalin-Vilkovisky algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(2):425–440, 1998.

[Hus94] Dale Husemoller : *Fibre bundles*, volume 20 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third édition, 1994.

[Huy05] Daniel Huybrechts : *Complex geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.

[IdLMP99] R. Ibáñez, M. de León, J. C. Marrero et E. Padrón : Leibniz algebroid associated with a Nambu-Poisson structure. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 32(46):8129, 1999.

[IM01] David Iglesias et Juan C. Marrero : Generalized Lie bialgebroids and Jacobi structures. *J. Geom. Phys.*, 40(2):176–199, 2001.

[Joy00] Dominic D. Joyce : *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[KN96] Shoshichi Kobayashi et Katsumi Nomizu : *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Kob57] Shoshichi Kobayashi : Theory of connections. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 43:119–194, 1957.

[KS95] Y. Kosmann-Schwarzbach : Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. *Acta Appl. Math.*, 41(1-3):153–165, 1995. Geometric and algebraic structures in differential equations.

[KS96a] Yvette Kosmann-Schwarzbach : From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(5):1243–1274, 1996.

[KS96b] Yvette Kosmann-Schwarzbach : The Lie bialgebroid of a Poisson-Nijenhuis manifold. *Lett. Math. Phys.*, 38(4):421–428, 1996.

[KS05] Yvette Kosmann-Schwarzbach : Quasi, twisted, and all that. . .in Poisson geometry and Lie algebroid theory. *In The breadth of symplectic and Poisson geometry*, volume 232 de *Progr. Math.*, pages 363–389. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.

[KS08] Yvette Kosmann-Schwarzbach : Poisson manifolds, Lie algebroids, modular classes : a survey. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 4:Paper 005, 30, 2008.

[KS10] Alexei Kotov et Thomas Strobl : Generalizing geometry—algebroids and sigma models. *In Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry*, volume 16 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 209–262. Eur. Math. Soc., Zürich, 2010.

[KS13] Yvette Kosmann-Schwarzbach : Courant algebroids. A short history. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 9:Paper 014, 8, 2013.

[KSLG05] Yvette Kosmann-Schwarzbach et Camille Laurent-Gengoux : The modular class of a twisted Poisson structure. *In Travaux mathématiques. Fasc. XVI*, Trav. Math., XVI, pages 315–339. Univ. Luxemb., Luxembourg, 2005.

[KSM90] Yvette Kosmann-Schwarzbach et Franco Magri : Poisson-Nijenhuis structures. *Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, 53(1):35–81, 1990.

[KSM02] Y. Kosmann-Schwarzbach et K. C. H. Mackenzie : Differential operators and actions of Lie algebroids. *In Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001)*, volume 315 de *Contemp. Math.*, pages 213–233. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[KSR10] Yvette Kosmann-Schwarzbach et Vladimir Rubtsov : Compatible structures on Lie algebroids and Monge-Ampère operators. *Acta Appl. Math.*, 109(1):101–135, 2010.

[Kub89] Jan Kubarski : Lie algebroid of a principal fibre bundle. *In Publications du Département de Mathématiques. Nouvelle Série. A, Vol. 1*, volume 89 de *Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. A*, pages 1–66. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1989.

[Kub96] Jan Kubarski : Bott's vanishing theorem for regular Lie algebroids. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(6):2151–2167, 1996.

[LBM09] David Li-Bland et Eckhard Meinrenken : Courant algebroids and Poisson geometry. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (11):2106–2145, 2009.

[LBM14] David Li-Bland et Eckhard Meinrenken : Dirac Lie groups. *Asian J. Math.*, 18(5):779–815, 2014.

[Lee09] Jeffrey M. Lee : *Manifolds and differential geometry*, volume 107 de *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[Lee13] John M. Lee : *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second édition, 2013.

[LGPV13] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau et Pol Vanhaecke : *Poisson structures*, volume 347 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer, Heidelberg, 2013.

[Lic77] André Lichnerowicz : Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Differential Geometry*, 12(2):253–300, 1977.

[Lod93] Jean-Louis LODAY : Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz. *Enseign. Math. (2)*, 39(3-4):269–293, 1993.

[LS12] Melvin LEOK et Diana SOSA : Dirac structures and Hamilton-Jacobi theory for Lagrangian mechanics on Lie algebroids. *J. Geom. Mech.*, 4(4):421–442, 2012.

[LWX97] Zhang-Ju LIU, Alan WEINSTEIN et Ping XU : Manin triples for Lie bialgebroids. *J. Differential Geom.*, 45(3):547–574, 1997.

[Mac05] Kirill C. H. MACKENZIE : *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, volume 213 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Mar08] Charles-Michel MARLE : Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 457:57, 2008.

[Mok97] Tahar MOKRI : Matched pairs of Lie algebroids. *Glasgow Math. J.*, 39(2):167–181, 1997.

[MS88] Calvin C. MOORE et Claude SCHOCHET : Tangential cohomology. *In Global Analysis on Foliated Spaces*, pages 68–91. Springer Science Business Media, 1988.

[MW11] Varghese MATHAI et Siye WU : Analytic torsion for twisted de Rham complexes. *J. Differential Geom.*, 88(2):297–332, 2011.

[MX94] Kirill C. H. MACKENZIE et Ping XU : Lie bialgebroids and Poisson groupoids. *Duke Math. J.*, 73(2):415–452, 1994.

[NdCCG04] J. M. Nunes da COSTA et J. CLEMENTE-GALLARDO : Dirac structures for generalized Lie bialgebroids. *J. Phys. A*, 37(7):2671–2692, 2004.

[Nee08] Karl-Hermann NEEB : Differential topology of fiber bundles. Differential Topology of Fiber Bundles, 2008.

[Pra67] Jean PRADINES : Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différenetiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 264:A245–A248, 1967.

[Roy99] Dmitry ROYTENBERG : Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds. 1999. arXiv:9910078.

[Roy02a] Dmitry ROYTENBERG : On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids. *In Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001)*, volume 315 de *Contemp. Math.*, pages 169–185. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Roy02b] Dmitry ROYTENBERG : Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 61(2):123–137, 2002.

[Roy07] Dmitry ROYTENBERG : AKSZ-BV formalism and Courant algebroid-induced topological field theories. *Lett. Math. Phys.*, 79(2):143–159, 2007.

[Roy09] Dmitry ROYTENBERG : Courant-Dorfman algebras and their cohomology. *Lett. Math. Phys.*, 90(1-3):311–351, 2009.

[Rub13] Roberto RUBIO : B_n-generalized geometry and G_2^2-structures. *J. Geom. Phys.*, 73:150–156, 2013.

[RW98] Dmitry ROYTENBERG et Alan WEINSTEIN : Courant algebroids and strongly and strongly homotopy lie algebras. *Letters in Mathematical Physics*, 46(1): 81–93, 1998.

[Sch79] M. SCHEUNERT : *The Theory of Lie Superalgebras : An Introduction (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer, 1979.

[Ser06] Jean-Pierre SERRE : *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition.

[Sti09] Mathieu STIÉNON : Hypercomplex structures on Courant algebroids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(9-10):545–550, 2009.

[ŠW01] Pavol ŠEVERA et Alan WEINSTEIN : Poisson geometry with a 3-form background. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, (144):145–154, 2001. Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).

[SX08] Mathieu STIÉNON et Ping XU : Modular classes of Loday algebroids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(3-4):193–198, 2008.

[Tak94] Leon TAKHTAJAN : On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 160(2):295–315, 1994.

[Ton97] Philippe TONDEUR : *Geometry of foliations*, volume 90 de *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[Uch02] Kyousuke UCHINO : Remarks on the definition of a Courant algebroid. *Lett. Math. Phys.*, 60(2):171–175, 2002.

[Vai94] Izu VAISMAN : *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, volume 118 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[Vai97] Arkadi VAINTROB : Lie algebroids and homological vector fields. *Russian Mathematical Surveys*, 52(2):428–429, apr 1997.

[Vai05] Izu VAISMAN : Transitive Courant algebroids. *Int. J. Math. Math. Sci.*, (11): 1737–1758, 2005.

[Var84] V. S. VARADARAJAN : *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, volume 102 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984. Reprint of the 1974 edition.

[Š00] Pavol ŠEVERA : Letters to Alan Weinstein, 1998–2000.

[Xu99] Ping XU : Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry. *Comm. Math. Phys.*, 200(3):545–560, 1999.

[YM06a] Hiroaki YOSHIMURA et Jerrold E. MARSDEN : Dirac structures in Lagrangian mechanics. I. Implicit Lagrangian systems. *J. Geom. Phys.*, 57(1):133–156, 2006.

[YM06b] Hiroaki YOSHIMURA et Jerrold E. MARSDEN : Dirac structures in Lagrangian mechanics. II. Variational structures. *J. Geom. Phys.*, 57(1):209–250, 2006.

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

université angers

Thèse de Doctorat

Benjamin Couéraud

Automorphismes forts des algébroïdes de Courant réguliers

Strong automorphisms of regular Courant algebroids

Résumé

Les algébroïdes de Courant ont été introduits par T. J. Courant dans sa thèse portant sur l'intégrabilité des structures de Dirac. Ils sont devenus d'importants objets en géométrie différentielle depuis le travail de Z.-J. Liu, A. Weinstein et P. Xu sur les bigébroïdes de Lie. Ils jouent un rôle grandissant en Physique Théorique ainsi qu'en Mathématiques.
Dans cette thèse, on s'intéresse à décrire les automorphismes forts d'un algébroïde de Courant régulier. Dans une première partie des rappels sont faits sur les algébroïdes de Lie. Dans une seconde partie, on étudie les algébroïdes de Courant. Dans une troisième partie, après introduction de la notion de dissection, nous explicitons le groupe des automorphismes forts d'un algébroïde de Courant régulier relativement à une dissection, et calculons l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux relativement à cette dissection. De cette étude sont apparues de nouvelles symétries qui pourraient s'avérer utiles en Physique Théorique.

Mots clés

algébroïdes de Lie, algébroïdes de Courant, automorphismes.

Abstract

Courant algebroids have been introduced by T. J. Courant in his PhD thesis concerning the integrability of Dirac structures. They have become important objects in differential geometry since the seminal work of Z.-J. Liu, A. Weinstein and P. Xu on Lie bialgebroids. They play an increasing role in theoretical Physics as well as in Mathematics.
In this thesis, we are interested by describing strong automorphisms of a regular Courant algebroid. In a first part, we review Lie algebroids. In a second part, we study Courant algebroids. In a third part, after introducing the notion of dissection, we compute the automorphism group of a regular Courant algebroid with respect to a dissection of it, and then compute the Lie algebra of infinitesimal automorphisms with respect to this dissection. From this work appeared new symmetries that could be useful in theoretical Physics.

Key Words

Lie algebroids, Courant algebroids, automorphisms.